Е. П. Кузнецова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка,
Г. Л. Муравьёва, заведующая кафедрой естественнонаучных дисциплин Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка, кандидат педагогических наук, доцент,
Л. Б. Шнеперман, кандидат физико-математических наук, профессор,
Б. Ю. Ящин, учитель математики высшей квалификационной категории

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (НЕИЗВЕСТНЫМИ)

В соответствии с новой учебной программой по математике изучение темы «Системы линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными)» предусмотрено в VII классе после рассмотрения материала о линейной функции.

В предлагаемом нами для учителя варианте изложения этой темы выделены четыре пункта:

1. Линейное уравнение с двумя переменными (неизвестными) и его график.
2. Система линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными) и её графическая интерпретация.
3. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения и способом подстановки.
4. Система линейных уравнений как математическая модель описания реальных процессов.

В каждом из этих пунктов в основном тексте теоретического материала введены рубрики: «Определение», «Теорема», «Свойство», «Замечание», «Пример», «Задача». В конце каждого пункта формулируются вопросы для самоконтроля. В практической части используются рубрики: «Упражнения», «Задания для исследования» и «Проектные задания». В конце изложения темы предложены задания для самопроверки усвоения рассмотренного материала.

Символом ▲ выделены дополнительные материалы.

Символом ■ выделяются приводимые в тексте исторические сведения, сведения о происхождении терминов и другая информация.

Между двух стрелок (↓ ↓) размещаются пояснения к преобразованиям в решениях примеров.

Наряду с символами в тексте используются и шрифтовые выделения. Так, термины, обозначающие ***новые понятия***, печатаются полужирным курсивом. **Важные моменты теории** печатаются полужирным прямым шрифтом. Образцы *устной математической речи* выделяются светлым курсивом. Подчёркиванием выделены обращения к учащимся, призванные активизировать их работу с объяснительным текстом.

В большинстве упражнений условия нечётных подпунктов, например 1, 3, по уровню сложности и требованию аналогичны условиям чётных подпунктов.

Кроме того, имеются условные обозначения уровней трудности заданий. Используются три вида обозначений: кружок (4°), звёздочка (9*) и номера без обозначений (8). Номерами со звёздочкой обозначены задания, выполнение которых демонстрирует высокий уровень учебных достижений (9—10 баллов). Номерами без обозначений — задания, решение которых соответствует достаточному уровню учебных достижений (7—8 баллов). Номерами с кружком — задания, решение которых должно быть освоено всеми учащимися, качество их выполнения может соответствовать отметкам в диапазоне от 1 до 6 баллов.

1. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. В гостинице – 108 мест и два вида номеров: двухместные и трёхместные. Сколько в гостинице номеров каждого вида?

Будем рассуждать так. Пусть в гостинице имеется x двухместных номеров и y трёхместных номеров, тогда по условию задачи получаем равенство, содержащее две неизвестные (переменные):

$$2x + 3y = 108. \qquad (1)$$

Равенство (1) является математической моделью условия задачи и представляет собой ***уравнение с двумя неизвестными*** (***переменными***), которое выражает *зависимость между ними.*

Определение. ***Линейным уравнением с двумя переменными*** (***неизвестными***) **называется уравнение вида**

$$ax + by = c, \qquad (2)$$

где a, b, c — числа, x и y — переменные (неизвестные).

Числа a, b называют *коэффициентами при переменных* x и y, а число c — *свободным членом* уравнения (2).

Уравнение (1) является линейным уравнением с двумя переменными.

Обратите внимание: показатели степеней при обеих переменных в линейных уравнениях (1) и (2) равны единице. А, например, уравнение

$$2x + y^3 = 108 \qquad (3)$$

нельзя назвать линейным, поскольку в нём показатель степени одной из переменных y равен 3, т. е. больше единицы.

Но как решить линейное уравнение (1)?

По условию задачи значения неизвестных x и y могут быть только натуральными числами. Подбором можно указать не одну, а несколько (убедитесь в этом) таких пар значений x и y, при которых уравнение (1) обращается в верное числовое равенство:

$$x = 9,\ y = 30, \text{ или } x = 18,\ y = 24,$$
$$\text{или } x - 51,\ y = 2, \text{ и др.}$$

Принято, например, пару значений $x = 9$ и $y = 30$, которая является одним из решений уравнения (1), записывать в виде (9; 30) или (30; 9). Далее условимся число 9 в скобках записывать первым, а число 30 — вторым, так как в латинском алфавите буква x стоит раньше, чем буква y. Запись (9; 30) будем называть ***упорядоченной парой чисел.*** (Координаты точек координатной плоскости также записываются упорядоченными парами чисел.)

Определение. ***Решением уравнения с двумя переменными*** (***неизвестными***) **называется упорядоченная пара значений переменных (неизвестных), при которых это уравнение обращается в верное числовое равенство.**

Например, решением линейного уравнения (1) являются упорядоченные числовые пары (9; 30), (18; 24), (51; 2) и т. д. А для уравнения (3) эти пары решениями не являются (убедитесь в этом и подбором найдите несколько его решений).

Определение. ***Решить уравнение с двумя переменными*** **— это значит найти все его решения или доказать, что их нет.**

Если уравнение (1) не рассматривать как модель задачи о количестве номеров в гостинице, то значения переменных x и y могут быть не только натуральными числами. Например, пары (−6,6; 40,4) и (0; 36) — тоже его решения (проверьте это).

Чтобы найти все решения уравнения (1), *выразим из этого уравнения y через x*, для чего перенесём слагаемое $2x$ из левой части в правую, изменив его знак на противоположный,

$$3y = 108 - 2x,$$

разделив обе части этого уравнения на 3, получим формулу

$$y = 36 - \frac{2}{3}x. \qquad (4)$$

Равенством (4) задана линейная функция, графиком которой является прямая. Абсцисса x может принять любое числовое значение t, а ордината y вычисляется по формуле (4):

$$y = 36 - \frac{2}{3}t.$$

Полученные значения $x = t$ и $y = 36 - \frac{2}{3}t$ обращают уравнение (4), а значит, и уравнение (1) в верное числовое равенство (убедитесь в этом):

$$2t + 3\cdot(36 - \frac{2}{3}t) = 108.$$

Итак, уравнение (1) имеет бесконечно много решений, все его решения – это множество упорядоченных пар вида $(t; 36 - \frac{2}{3}t)$, где t — любое число.

▲ При решении уравнения (1) можно было *выразить x через y*:

$$x = -\frac{3}{2}y + 54.$$

Тогда, если $y = p$, где p — любое число, то все решения уравнения (1) — это множество упорядоченных пар чисел вида $(-\frac{3}{2}p + 54; p)$.

Получили **два варианта записи множества всех решений** уравнения (1); чаще используют первый вариант.

Заметим, что любое линейное уравнение $ax+by=c$ при условии $a \neq 0$ или $b \neq 0$ имеет бесконечное множество решений (убедитесь в этом самостоятельно). ▲

О п р е д е л е н и е. Два уравнения с двумя переменными (неизвестными) называются *равносильными*, если каждое решение первого уравнения является решением второго и, наоборот, каждое решение второго уравнения является решением первого, т. е. если множества их решений совпадают.

Равносильными считаются и уравнения, которые не имеют решений.

Уравнения (1) и (3) *не равносильны*, поскольку, например, пара (0; 36) является решением уравнения (1), но не является решением уравнения (3). А уравнения (1) и (4) *равносильны*, так как множества их решений совпадают.

Уравнения

$$x^2 + y^2 = -1 \text{ и } |x| + |y| + 8 = 0 \qquad (5)$$

также *равносильны*, поскольку они оба не имеют решений (поясните почему).

При решении уравнений с двумя переменными используются те же свойства, что и при решении уравнений с одной переменной (назовите их).

Пример 1. Решите линейное уравнение с двумя переменными:

$$0\cdot x + y = 7.$$

Р е ш е н и е. Пусть $x = m$ (m — любое число), тогда, подставив m вместо x в данное уравнение, получим $0\cdot m + y = 7$, откуда $y = 7$. Таким образом, решением этого уравнения является множество упорядоченных пар $(m; 7)$, где m — любое число.

О т в е т : $(m; 7)$, где m — любое число.

■ Часто при решении уравнения с двумя переменными требуется найти **только натуральные значения** или **только целые значения этих переменных**. Тогда говорят, что нужно *решить уравнение в натуральных числах* или *решить уравнение в целых числах*. В этих случаях уравнения с несколькими переменными называют ещё ***диофантовыми уравнениями*** по имени древнегреческого математика Диофанта (III век) из города Александрии.

Например, уравнение (1) можно называть диофантовым уравнением, когда с его помощью решают задачу о количестве номеров в гостинице. ■

Определение. ***Графиком уравнения с двумя переменными*** **называется множество всех точек на координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.**

Графики равносильных уравнений совпадают.

Например, уравнения (5) графиков не имеют, поскольку у каждого из них нет решений. А графиком уравнения

$$(x+1)^2+(y-4)^2=0$$

является единственная точка с координатами $x=-1$; $y=4$ (поясните почему).

Пример 2. Изобразите график линейного уравнения:

а) $0\cdot x-2y=6$; б) $3x-0\cdot y=6$.

Решение.

а) Линейное уравнение с двумя переменными $0\cdot x-2y=6$ равносильно уравнению $y=-3$, поэтому его графиком является прямая, параллельная оси Ox (она изображена на рисунке 1). Напомним, что прямая вида $y = b$ является частным случаем графика линейной функции.

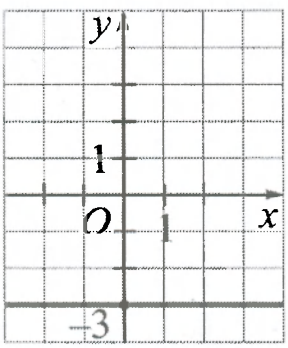

Рисунок 1

б) Линейное уравнение с двумя переменными $3x-0\cdot y=6$ равносильно уравнению $x=2$, поэтому его графиком является прямая, параллельная оси Oy (она изображена на рисунке 2). Напомним, что, на основании определения функции (сформулируйте его), данная прямая не является графиком линейной функции.

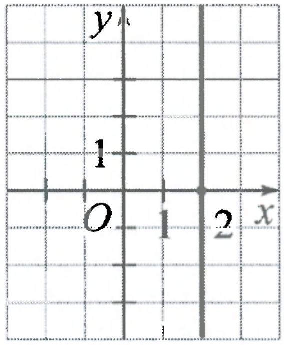

Рисунок 2

Линейное уравнение вида $ax+by=c$, где a, b, c — числа, причём $a\neq 0$ или $b\neq 0$, называют ***уравнением прямой***. Изображение прямой, соответствующей такому линейному уравнению, называют ***графической*** (ещё говорят *геометрической*) ***интерпретацией решений линейного уравнения*** или ***графической интерпретацией линейного уравнения***.

■ ***Интерпретация*** (от латинского слова *interpretatio*) — толкование, объяснение, раскрытие смысла чего-либо. ■

▲ Не всякое линейное уравнение можно интерпретировать как уравнение прямой. Например, линейное уравнение $0\cdot x+0\cdot y=7$ графика вообще не имеет, поскольку оно не имеет решений. А линейному уравнению $0\cdot x+0\cdot y=0$ удовлетворяет любая пара чисел, т. е. координаты любой точки координатной плоскости. Такого вида уравнения получаются из (2), если не выполняется требование $a\neq 0$ или $b\neq 0$.

Заметим, что ограничение «$a\neq 0$ или $b\neq 0$» можно записывать и в виде $a^2+b^2\neq 0$ (поясните почему). ▲

Для ***построения*** (*изображения*) ***графика линейного уравнения с двумя переменными вида $ax+bc=c$, где a, b, c — числа и $a\neq 0$ или $b\neq 0$*** можно пользоваться следующим алгоритмом:

1) найти две упорядоченные пары чисел $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, которые являются решениями данного уравнения;

2) отметить на координатной плоскости Oxy точки (x_1, y_1) и $(x_2; y_2)$ и провести через них прямую.

Пример 3. Изобразите в одной системе координат графики линейных уравнений с двумя переменными:

$$x - 3y = 3 \text{ и } 2x - y = 3.$$

Решение. 1) В соответствии с алгоритмом для каждого из данных линейных уравнений подбором найдём по два решения (убедитесь, что они подобраны верно):

• для уравнения $x - 3y = 3$ — решения $(0; -1)$ и $(3; 0)$;

• для уравнения $2x - y = 3$ — решения $(0; -3)$ и $(2; 1)$.

2) Отметим на координатной плоскости точки $(0; -1)$ и $(3; 0)$ и проведём через них прямую. Получим график уравнения $x - 3y = 3$.

В этой же координатной плоскости через точки $(0; -3)$ и $(2; 1)$ проведём прямую. Получим график уравнения $2x - y = 3$.

Эти две прямые (они изображены на рисунке 3) пересекаются в точке K.

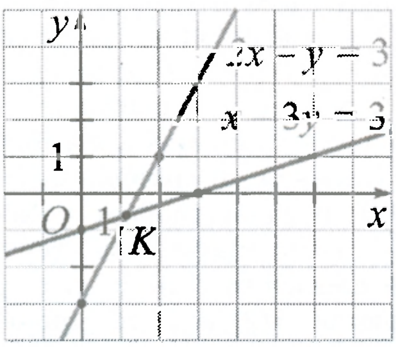

Рисунок 3

Вопросы для самоконтроля

[П]риведите примеры уравнений с дву[мя п]еременными (неизвестными).

[К]акое уравнение с двумя переменны[ми наз]ывается линейным? Приведите при[меры.]

[Чт]о называется решением уравнения с [двумя п]еременными?

4. Объясните, почему является верным следующее утверждение:

Упорядоченная пара $(-4; 1)$ *является решением уравнения*:

а) $5v + s = 1$; б) $b + a^2 = 17$; в) $p + q + 3 = 0$; г) $(x + y)^2 = 9$.

5. Что значит решить уравнение с двумя переменными?

6. Какие два уравнения с двумя переменными называются равносильными?

7. Что называется графиком уравнения с двумя переменными?

8. Что называют графической интерпретацией линейного уравнения с двумя переменными?

9. Какое линейное уравнение с двумя переменными называют уравнением прямой?

10. Сформулируйте алгоритм построения (изображения) графика уравнения вида $ax + by = c$, где a, b, c — числа и $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

Упражнения

1°. Укажите среди заданных уравнений линейные уравнения с двумя переменными (неизвестными):

1) $5x + y = 9$;	2) $x - 9y = -3$;
3) $-4xy = 13$;	4) $2y - 3x = 21$;
5) $x^2 - 7y = 0$;	6) $x^3 = y^2$.

2°. Какие из упорядоченных пар чисел $(1; 2)$; $(-1; -3)$; $(2; -4)$ являются решениями уравнения с двумя переменными:

1) $x - 2y = -3$;	2) $4x - 5y = 11$;
3) $y - 3x = -10$;	4) $2x^2 - y^2 = -7$;
5) $y^2 + x^2 = 5$;	6) $x^3 - y^2 = -8$;
7) $0 \cdot x + 0 \cdot y = -4$;	8) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$;
9) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 2$.	

3°. Верно ли, что упорядоченная пара чисел:

1) $(1; 3)$ — решение уравнения $x + 2y = 7$;
2) $(3; -1)$ — решение уравнения $3x - y = 10$;
3) $(0; 15)$ — решение уравнения $7x + y = 15$;
4) $(5; 3)$ — решение уравнения $3x - 5y = 0$;
5) $(0; 0)$ — решение уравнения $5x^2 - 7y^2 = 0$;
6) $(-2; 0)$ — решение уравнения $5y^2 - 7x^3 = 56$?

1) $y = 0 \cdot x + 5$; 2) $0 \cdot y + x = 1$;
3) $y = \frac{1}{5}x$; 4) $y = \frac{1}{2}x + 3$;
5) $x = 7{,}3 - 0{,}1y$; 6) $y = -\frac{6}{x} + 1$;
7) $0 \cdot y = 0 \cdot x + 5$; 8) $0 \cdot y - 0 \cdot x = 0$;
9) $0{,}4x - 0{,}7y = 0$.

16°. Изобразите график линейного уравнения с двумя переменными

1) $3x - 2y = 4$; 2) $5x - y = 4$;
3) $3x + 2y = 5$; 4) $4x + 3y = 2$;
5) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 2$; 6) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

Выполнив тождественные преобразования, установите вид полученного уравнения и (если это возможно) изобразите его график (**17—20**).

17°. 1) $6x + 8y = 3x - 12y + 5$;
2) $7x - 2y - 6 = 4x - 2y - 1$;
3) $2(x - 4y) - 10 = 8(x - y) - 6x + 5$;
4) $5 + 2(3x + y - 2) = 2(x - y) + 4(y + x) + 1$.

18. 1) $5(x - y) - 4(2x - 3y) = 3(2y - x)$;
2) $6(2x - 3y) - 3(3x - 2y) = 2(x - 6y)$;
3) $3\left(\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y\right) + 2\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y\right) = 4\left(\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y\right)$;
4) $\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) = \frac{1}{2}(y - 6x)$.

19. 1) $(x - 6)^2 - 2y(y - 3) = x(x - 5) - 2(y + 1)^2$;
2) $(x + 8)^2 + 4y(y + 2) = x(x - 3) + (2y - 1)^2$;
3) $(2x - 3)(2x + 3) - (3y - 1)^2 = (1 - 2x)^2 + (3y + 2)(2 - 3y)$;
4) $(4x - 1)^2 - (y - 3)(y + 7) = (4x - 1)(4x + 1) - (y + 1)^2$.

20*. 1) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + 17 = 2(2y - x)$;
2) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2(x - y - 5)$.

21. В одной системе координат изобразите графики указанных линейных уравнений с двумя переменными:

1) $5x + 3y = 1$ и $10x + 6y = 2$;
2) $2x + 3y = 2$ и $6x + 9y = 4$;
3) $2x - 3y = 1$ и $-4x - 2y = 3$;
4) $4x - 7y = 3$ и $-12x + 21y = 9$.

22. Исследуйте, как связано взаимное расположение (пересечение, параллельность, совпадение) двух прямых из задания **21** с отношением коэффициентов при переменных x и y и с отношением свободных членов в уравнениях этих прямых.

23*. Изобразите на координатной плоскости график уравнения с двумя переменными:
1) $2x - y = 6$ при $1 \le x \le 3$;
2) $(2x + 4)^2 + y^2 = 0$;
3) $x + 4 + 2y = 0$;
4) $3x + y = 5$ при $x \le 4$;
5) $x + 4 + 2y = 0$ при $|x| < 0$;
6) $x - 4y = 0$.

24. Укажите, в каких случаях (ответ объясните) график уравнения с двумя переменными из задания **23** имеет вид:
а) прямой; б) луча; в) отрезка; г) точки.

25. Найдите ординату точки графика линейного уравнения $20x - 14y = 1$, если её абсцисса равна:
1) $-1{,}1$; 2) $-0{,}5$; 3) $0{,}45$; 4) $0{,}75$.

26. Найдите абсциссу точки графика линейного уравнения $16x + 15y = 66$, если её ордината равна:
1) -2; 2) $-0{,}2$; 3) $0{,}4$; 4) 3.

Составьте линейное уравнение с двумя переменными, математическую модель условия задачи, и найдите (подбором) три его решения в целых неотрицательных числах (**27—30**).

27. Какое количество тетрадей ценой 15 копеек и ценой 45 копеек можно купить на 1 рубль 50 копеек?

28. Расстояние между посёлками 340 км. Одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 2 часа. Определите возможные скорости этих автомобилей.

29. Периметр прямоугольника равен 24 см. Определите возможные длины сторон такого прямоугольника.

30. Цена баскетбольного мяча 80 рублей, а футбольного — 16 рублей. Сколько баскетбольных и сколько футбольных мячей куплено, если на покупку затрачено 256 рублей?

31. Составьте такие три текстовые задачи с различными сюжетами, чтобы математической моделью для их решения являлось одно и то же линейное уравнение с двумя переменными.

Задания для исследования

1. Проанализируйте теоретический материал пункта 1 и практические задания к нему и сделайте выводы об отличиях между понятиями ***«график линейного уравнения с двумя переменными»*** и ***«график линейной функции»***.

2. Найдите все решения задачи из пункта 1 о количестве двухместных и трёхместных номеров в гостинице, используя формулу (4).

а) Проанализируйте закономерности в последовательностях значений переменных x и y, которые являются решениями этой задачи.

б) Определите, сколько всего решений имеет эта задача.

в) Решите аналогичную задачу при условии, что общее количество мест в гостинице:

$$18; \ 302; \ p?$$

3. Составьте уравнение с двумя переменными – математическую модель условия следующей задачи.

Задача. В цветочном киоске за час продали 2 упаковки красных роз и 3 упаковки жёлтых роз. Цены упаковок с красными и жёлтыми розами были разными. Выручка за час составила 108 рублей. Какая цена упаковки красных роз и какая цена упаковки жёлтых роз?

а) Определите возможные значения переменных в составленном уравнении, учитывая сюжет данной задачи.

б) Опишите условия, при которых составленное уравнение можно будет назвать диофантовым уравнением. Приведите пример его решения.

в) Опишите условия, при которых составленное уравнение нельзя назвать диофантовым уравнением. Приведите пример его решения.