ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 530:[1],514:[84],539:[182]
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-34-42

Поступила в редакцию 19.09.2023
Received 19.09.2023

А. Н. Лаврёнов[1], И. А. Лаврёнов[2]

[1]Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка, Минск, Республика Беларусь
[2]ООО «Октонион технолоджи», Минск, Республика Беларусь

ОБ АЛГЕБРЕ СИММЕТРИИ ОДНОМЕРНОГО КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА НА ГИПЕРБОЛЕ

Аннотация. Рассмотрена квантово-механическая задача о гармоническом осцилляторе на гиперболе как одномерном пространстве постоянной отрицательной кривизны. Дано обобщение на модель сингулярного осциллятора (СО) в одномерных геометриях Кэли – Клейна методом факторизации. Найдены спектр энергии и волновые функции стационарных состояний, имеющие кривизну пространства в качестве параметра. Для уровней энергии СО эффект ненулевой кривизны проявляется наглядным образом через положительное или отрицательное в зависимости от знака кривизны слагаемое квадратичное по номеру уровня. Полученные результаты совпадают с результатами, опубликованными ранее. Также показана в явном виде динамическая симметрия проблемы, которая реализуется в виде квадратичной алгебры Хана $QH(3)$ или изоморфной ей алгебры Хиггса.

Ключевые слова: сингулярный осциллятор, пространство постоянной отрицательной кривизны, гипербола, алгебра Хана, алгебра Хиггса, геометрии Кэли – Клейна

Для цитирования. Лаврёнов, А. Н. Об алгебре симметрии одномерного квантово-механического осциллятора на гиперболе / А. Н. Лаврёнов, И. А. Лаврёнов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 1. – С. 34–42. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-34-42

Alexandre N. Lavrenov[1], Ivan A. Lavrenov[2]

[1]Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Republic of Belarus
[2]Octonion technology Ltd., Minsk, Republic of Belarus

ON THE SYMMETRY ALGEBRA OF A ONE-DIMENSIONAL QUANTUM-MECHANICAL OSCILLATOR ON A HYPERBOLA

Abstract. The quantum-mechanical problem of a harmonic oscillator on a hyperbola as a one-dimensional space of constant negative curvature is considered in this article. A generalization to the singular oscillator model in the context of one-dimensional Cayley – Klein geometries is given by the factorization method. The energy spectrum and wave functions of stationary states are found having the curvature of space as a parameter. For the energy levels of the singular oscillator, the effect of non-zero curvature is clearly manifested through a positive or negative term, depending on the sign of the curvature, which is quadratic in the level number. The results obtained are consistent with those previously published. The dynamical symmetry of the problem is shown explicitly as a quadratic Hahn algebra $QH(3)$ or its isomorphic Higgs algebra.

Keywords: the singular oscillator, the space of constant negative curvature, the hyperbola, a Hahn algebra, a Higgs algebra, Caley – Klein geometries

For citation. Lavrenov A. N., Lavrenov I. A. On the symmetry algebra of a one-dimensional quantum-mechanical oscillator on a hyperbola. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 1, pp. 34–42 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-34-42

Введение. В работе [1] была показана тесная связь между полиномами Рака, объединением трех $SU(1,1)$ алгебр и симметрией суперинтегрируемой модели второго порядка на 2-сфере. Последнее реализуется путем объединения точно решаемых одномерных моделей в рамках алгебры Рака, симметрийными операторами которой выступают промежуточные операторы Казимира при сложении трех неприводимых представлений $SU(1,1)$. Обобщение на большие размерности можно найти в [2], а самый простейший одномерный случай, по известной авторам литературе, в явном виде и в данном аспекте рассмотрен не был. Возможно, это связано с малой размерностью задачи, при которой алгебра Рака не реализуема. С другой стороны, в [3, 4] был предложен другой универсальный подход к точно решаемым задачам на пространствах постоянной кривизны, но также начиная с двумерного случая. Поэтому в настоящей работе исследуется симметрийный аспект задачи о гармоническом осцилляторе (ГО) на гиперболе как одномерном пространстве постоянной отрицательной кривизны H_1, а также его обобщение на модель сингулярного осциллятора (СО) в одномерных геометриях Кэли – Клейна методом факторизации. Для полноты библиографического описания текущей ситуации анализируемой проблемы отметим еще только работы [5, 6] и [7], где на H_1 задача в явном виде решена для СО аналитическим способом и для ГО с помощью метода факторизации соответственно. Далее подчеркнем, что в историческом аспекте по данной тематике обычно принято вначале вспоминать работы Э. Шредингера [8], Л. Инфельда, А. Шильда [9], а затем исследования П. Хиггса [10], А. А. Богуша, Ю. А. Курочкина, В. С. Отчика [11, 12].

Исходные положения. Напомним, согласно [13], об определении алгебры $SU(1,1)$ с ее коммутационными соотношениями в аксиальном базисе операторов (b_0; $b_\pm$):

$$[b_0; b_\pm] = \pm b_\pm; \quad [b_-; b_+] = 2b_0, \tag{1}$$

или в декартовом базисе операторов (b_0; b_1; b_2):

$$[b_0; b_1] = ib_2; \quad [b_1; b_2] = -ib_0; \quad [b_2; b_0] = ib_1, \tag{2}$$

где $[a; b] \equiv ab - ba$ – коммутатор, и между базисами существует линейная связь $b_\pm = b_1 \pm ib_2$.

Для алгебры $SU(1,1)$ можно определить внешний автоморфизм, который можно связать с оператором четности алгебры

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}(\tau = \pm 1): \quad b_\bullet = \tau b_\bullet,$$

где индекс $\bullet \in \{0; \pm; 1; 2\}$, или

$$b_0 = b_0 \to \tau = 1; \quad b_1 = -b_1; \quad b_2 = -b_2; \quad b_\pm = -b_\pm \to \tau = -1.$$

Оператор Казимира Q имеет собственное значение q и выражается формулой

$$Q = b_0^2 - b_0 - b_+ b_- \equiv b_0^2 - b_1^2 - b_2^2. \tag{3}$$

Это позволяет определить через соотношение $q = k(1-k)$ и знак τ различные самосопряженные неприводимые представления алгебры $SU(1,1)$. В частности, имеем дискретные серии: положительную дискретную серию D^+ ($k > 0$; $\tau = 1$) и отрицательную дискретную серию D^- ($k > 0$; $\tau = -1$), получаемую из D^+ при помощи внешнего автоморфизма А. При сложении двух независимых экземпляров алгебры $SU(1,1)$ положительной дискретной серии D^+ A и B, т. е. $C = A \oplus B$, для результирующей алгебры C в [14] была найдена алгебра скрытой симметрии – так называемая алгебра Хана, представляющая частный случай алгебры Рака:

$$\big[K_2[K_1, K_2]\big] = 2K_2K_1K_2 - K_2^2K_1 - K_1K_2^2 = -2(K_1K_2 + K_2K_1) + 4\varepsilon(Q_A - Q_B); \tag{4}$$

$$\big[[K_1, K_2]K_1\big] = 2K_1K_2K_1 - K_1^2K_2 - K_2K_1^2 = -2K_1^2 - 4K_2 + 2\varepsilon^2 + 4(Q_A + Q_B), \tag{5}$$

где ε – собственное значение оператора $C_0 = A_0 + B_0$; $K_1 = A_0 - B_0$; $K_2 = Q_{C=A\oplus B}$, Q_A и Q_B – операторы Казимира алгебр $C = A \oplus B$, A и B соответственно.

Алгебры скрытой и динамической симметрии. Для наглядного возможного различия в общем виде найдем алгебру скрытой симметрии при сложении двух независимых экземпляров алгебры $SU(1,1)$ различных дискретных серий, т. е. один экземпляр алгебры $SU(1,1)$ A принадлежит дискретной серии со знаком τ_A, а второй B – со знаком τ_B. В этом случае операторы $C_0 = A_0 + B_0$; $K_1 = A_0 - B_0$ остаются без изменений, а оператор $K_2 = Q_{C=A\oplus B}$ видоизменяется согласно внешнему автоморфизму А следующим образом:

$$\begin{aligned} K_2 = Q_{C=A\oplus B} &= (A_0 + B_0)^2 - (A_0 + B_0) - (\tau_A A_+ + \tau_B B_+)(\tau_A A_- + \tau_B B_-) \equiv \\ &\equiv Q_A + Q_B + 2A_0B_0 - \tau_A\tau_B(A_+B_- + A_-B_+). \end{aligned} \tag{6}$$

Нетрудно показать, что для результирующей алгебры C алгебра скрытой симметрии будет та же так называемая алгебра Хана, представляющая частный случай алгебры Рака:

$$\left[K_2\left[K_1,K_2\right]\right]=2K_2K_1K_2-K_2^2K_1-K_1K_2^2=-2(K_1K_2+K_2K_1)+4\varepsilon(Q_A-Q_B);$$

$$\left[\left[K_1,K_2\right]K_1\right]=2K_1K_2K_1-K_1^2K_2-K_2K_1^2=-2K_1^2-4K_2+2\varepsilon^2+4(Q_A+Q_B).$$

Другими словами, получаем, что сама алгебра скрытой симметрии не меняется при выборе различных самосопряженных неприводимых представлений алгебры $SU(1,1)$ и ее параметры также не зависят от такого выбора. Далее будем работать именно с конкретным видом реализации алгебры $SU(1,1)$, который был дан в [13] и приведен ниже в формуле

$$b_2\equiv\frac{i}{2}\left(x\partial_x+\frac{1}{2}\right);\quad b_-=\pm\frac{\omega x^2}{2};\quad b_+=\pm\frac{1}{2}\left(-\partial_x^2+\frac{\gamma}{x^2}\right).\tag{7}$$

С поясняющей целью напомним, что в [1] гамильтониан трехпараметрической модели на двумерной сфере $x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$ в трехмерном всеобъемлющем пространстве $\boldsymbol{R}^3$ и образующие ее алгебры квадратичной симметрии соответствовали полному $Q_{D=A\oplus B\oplus C}$ и промежуточным операторам Казимира ($Q_1=Q_{A\oplus B}$; $Q_2=Q_{B\oplus C}$; $Q_3=Q_{A\oplus C}$) комбинации трех алгебр $SU(1,1)$ положительной дискретной серии A, B и C. В нашем обсуждаемом случае имеется сложение только двух алгебр $SU(1,1)$ A и B, что дает в силу этого двумерное всеобъемлющее пространство $\boldsymbol{R}^2$ с двумя координатами x_1 и x_2. Это, в свою очередь, ведет при выборе только положительных дискретных серий алгебр $SU(1,1)$ A и B к вырождению ранее упомянутой в $\boldsymbol{R}^3$ двумерной сферы $x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$ в окружность $x_1^2+x_2^2=R^2$ в $\boldsymbol{R}^2$. Если рассмотреть вариант различных дискретных серий алгебр $SU(1,1)$ A и B, то получим трансформацию окружности $x_1^2+x_2^2=R^2$ в гиперболу $x_1^2-x_2^2=R^2$.

Таким образом, согласно определению (6), оператор Казимира для результирующей алгебры C можно выразить так:

$$Q_{C=A\oplus B}\equiv C_0^2-C_1^2-C_2^2=Q_A+Q_B+2A_0B_0-2\tau_A\tau_B(A_1B_1+A_2B_2)$$

или

$$Q_{C=A\oplus B}=\frac{1}{4}\left(x_2^2\partial_1^2+x_2^2\partial_1^2+2x_1x_2\partial_1\partial_2+x_1\partial_1+x_2\partial_2-1-\left(\frac{g_1^2}{x_1^2}-\frac{g_2^2}{x_2^2}\right)(x_1^2-x_2^2)\right),\tag{8}$$

где принят во внимание конкретный вид реализации алгебры $SU(1,1)$ (7), а также учтено, что координаты с индексом 1 (2) отвечают алгебре $A(B)$.

Чтобы быстрее прийти к конечному результату, напомним выражение квадрата оператора псевдовращений:

$$L_{12}^2\equiv\left(-\frac{i}{2}\{x_1\partial_2+x_2\partial_1\}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(x_2^2\partial_1^2+x_2^2\partial_1^2+2x_1x_2\partial_1\partial_2+x_1\partial_1+x_2\partial_2\right),$$

т. е. получим

$$Q_{C=A\oplus B}=-L_{12}^2-\frac{1}{4}+\left(x_1^2-x_2^2\right)\left(\frac{g_1^2}{x_1^2}-\frac{g_2^2}{x_2^2}\right)\equiv-L_{12}^2-\frac{1}{4}+R^2\left(\frac{g_1^2}{x_1^2}-\frac{g_2^2}{x_2^2}\right)$$

или

$$Q_{C=A\oplus B}=-L_{12}^2-\frac{1}{4}+g_1^2+g_2^2-g_2^2\frac{x_1^2}{x_2^2}-g_1^2\frac{x_2^2}{x_1^2}.\tag{9}$$

Теперь посмотрим на полученные результаты с другой точки зрения. Согласно формуле (9), один из рассмотренных интегралов движения, а именно оператор Казимира результирующей алгебры, выраженный через квадрат квадрата оператора псевдовращений

$$K_2 \equiv Q_{C=A\oplus B} = -L_{12}^2 - \frac{1}{4} + R^2\left(\frac{g_1^2}{x_1^2} - \frac{g_2^2}{x_2^2}\right) = -L_{12}^2 - \frac{1}{4} + g_1^2 + g_2^2 - g_2^2\frac{x_1^2}{x_2^2} - g_1^2\frac{x_2^2}{x_1^2},$$

можно трактовать как определенный гамильтониан на гиперболе $x_1^2 - x_2^2 = R^2$ в определенном потенциальном поле: $H_5 = -L_{12}^2 + V(\varphi)$. Вид последнего дают дополнительные слагаемые к квадрату оператора псевдовращений, т. е.

$$V(\varphi) = R^2\left(\frac{g_1^2}{x_1^2} - \frac{g_2^2}{x_2^2}\right) - \frac{1}{4} \equiv -\frac{1}{4} + g_1^2 + g_2^2 - g_2^2\frac{x_1^2}{x_2^2} - g_1^2\frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

В такой интерпретации полученная ранее алгебра Хана как алгебра скрытой симметрии результирующего гамильтониана H_2^C становится динамической алгеброй симметрии нашей проблемы, или нового гамильтониана H_5. Остается конкретизировать явный вид нашего потенциального поля на гиперболе $x_1^2 - x_2^2 = R^2$. С этой целью перейдем к гиперболическим полярным координатам $x_1 = R\,\mathrm{ch}\,\varphi$; $x_2 = R\,\mathrm{sh}\,\varphi$ и получим потенциал Пешля – Теллера:

$$V(\varphi) = \frac{g_1^2}{\mathrm{ch}^2\varphi} - \frac{g_2^2}{\mathrm{sh}^2\varphi} - \frac{1}{4} \equiv -\frac{1}{4} + g_1^2 + g_2^2 - g_2^2\,\mathrm{cth}^2\varphi - g_1^2\,\mathrm{th}^2\varphi. \qquad (10)$$

Он был рассмотрен в [6] как потенциал СО в декартовых координатах всеобъемлющего двумерного пространства. Там же можно найти детали по явным видам волновой функции и энергии, хотя их также нетрудно получить из динамической алгеброй симметрии Хана нового гамильтониана H_5.

Однако далее мы выберем другой подход для получения вышеуказанных параметров нашей проблемы, который не был до конца реализован в [7], а именно решим ее с помощью метода факторизации с обобщением на добавление сингулярного члена $\dfrac{g}{x^2}$ в потенциале в декартовых координатах всеобъемлющего двумерного пространства, т. е. на модель СО.

Модель СО в одномерных геометриях Кэли – Клейна. Для удобства сравнения полученных результатов и согласно [7] будем рассматривать сразу 3 одномерные геометрии Кэли – Клейна $S_1(j)$, которые реализуются на полуокружности $S_1(j)$:

$$S_1(j) = \left\{x_1^2 + j^2x_2^2 = R^2, x_1 > 0\right\},$$

где параметр $j = 1, \iota, i$, а ι есть нильпотентная единица такая, что $\iota \neq 0$, но $\iota^2 = 0$. Значение $j = 1$ соответствует эллиптической геометрии $S_1(1) \equiv S_1$ на прямой с постоянной положительной кривизной, при $j = i$ имеем гиперболическую прямую $S_1(i) \equiv H_1$ с постоянной отрицательной кривизной, а в пределе $R \to \infty$ или при $j = \iota$ получаем обычную евклидову прямую $S_1(\iota) \equiv E_1$ с нулевой кривизной.

Учитывая результаты работы [7] при вводе безразмерных величин

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}R\frac{x_2}{x_1}; \qquad \rho = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}R, \qquad (11)$$

будем иметь следующий вид оператора Шредингера для сингулярного осциллятора на $S_1(j)$:

$$H(\xi; j) = \frac{\hbar\omega}{2}\left[-\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} + \xi^2 + \frac{g^2}{\xi^2}\right]. \qquad (12)$$

Для нахождения его собственных значений используем метод факторизации. С этой целью выразим оператор (12) через операторы рождения $a^{+}(j)$ и уничтожения $a^{-}(j)$:

$$H(\xi; j) = \frac{\hbar\omega}{2}[2a^{+}(j)a^{-}(j) + \lambda], \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} a^{+}(j) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} + \beta(j)\xi - \frac{\gamma(j)}{\xi}\right); \\ a^{-}(j) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} + \beta(j)\xi - \frac{\gamma(j)}{\xi}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Подстановка (14) в (13) и сравнение с (12) дает следующие условия на g, β и λ:

$$g^2 = \gamma(j)\big(\gamma(j) - 1\big); \quad \beta^2(j) - j^2\frac{\beta(j)}{\rho^2} = 1; \quad \lambda(j) = 2\beta(j)\left[\gamma(j) + \frac{1}{2}\right] + \gamma(j)\frac{j^2}{\rho^2}.$$

По аналогии с [7] из двух решений квадратного уравнения для $\beta(j)$ выберем положительное

$$\beta(j) = \frac{j^2}{2\rho^2} + \sqrt{1 + \frac{j^4}{4\rho^4}} = \frac{j^2}{2\rho^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\rho^4}{j^4}}\right). \tag{15}$$

Основное состояние сингулярного осциллятора найдем из условия

$$a^{-}(j)\Psi_0(\xi; j) = 0,$$

т. е.

$$\left(\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} + \beta\xi - \frac{\gamma}{\xi}\right)\Psi_0(\xi; j) = 0. \tag{16}$$

Решение уравнения (16) имеет следующий вид:

$$\Psi_0(\xi; j) = C_0(j)\xi^{\gamma(j)}\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{\gamma(j)}{2} - \beta(j)\frac{\rho^2}{j^2}}. \tag{17}$$

Далее строим цепочку операторов Шредингера

$$H_{n+1}(j) = \frac{\hbar\omega}{2}\left[2a_n^{-}(j)a_n^{+}(j) + \lambda_n(j)\right] = \frac{\hbar\omega}{2}\left[2a_{n+1}^{+}(j)a_{n+1}^{-}(j) + \lambda_{n+1}(j)\right], \tag{18}$$

где операторы рождения и уничтожения выражаются следующим образом:

$$a_n^{+}(j) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} + \beta_n(j)\xi - \frac{\gamma_n(j)}{\xi}\right);$$

$$a_n^{-}(j) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} + \beta_n(j)\xi - \frac{\gamma_n(j)}{\xi}\right).$$

Их произведения имеют вид

$$2a_n^{-}(j)a_n^{+}(j) = \left[-\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\left[\frac{d}{d\xi}\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} - \beta_n(j) - \frac{\gamma_n(j)}{\xi^2}\right] + \left(\beta_n(j)\xi - \frac{\gamma_n(j)}{\xi}\right)^2\right],$$

$$2a_{n+1}^{+}(j)a_{n+1}^{-}(j)=\left[-\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\left[\frac{d}{d\xi}\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}+\beta_{n+1}(j)+\frac{\gamma_{n+1}(j)}{\xi^2}\right]+\left(\beta_{n+1}(j)\xi-\frac{\gamma_{n+1}(j)}{\xi}\right)^2\right].$$

Из вышеприведенной цепочки операторов Шредингера (18) получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\left[\beta_{n+1}(j)+\beta_n(j)\right]\left[\beta_{n+1}(j)-\beta_{n+1}(j)-\dfrac{j^2}{\rho^2}\right]=0,\\ \left[\gamma_{n+1}(j)+\gamma_n(j)\right]\left[\gamma_{n+1}(j)-\gamma_n(j)-1\right]=0,\\ \lambda_{n+1}-\lambda_n=\beta_{n+1}+\beta_n+\dfrac{j^2}{\rho^2}\left[\gamma_{n+1}+\gamma_n\right]+2(\beta_{n+1}\gamma_{n+1}-\beta_n\gamma_n).\end{cases}$$

Ее решения представляются следующим образом:

$$\begin{cases}\beta_n(j)=\beta_0(j)+n\dfrac{j^2}{\rho^2},\\ \gamma_n(j)=\gamma_0(j)+n,\\ \lambda_n=\lambda_0+4n\left(\beta_0+\gamma_0\dfrac{j^2}{\rho^2}\right)+4n^2\dfrac{j^2}{\rho^2},\end{cases} \tag{19}$$

где нулевые параметры определяются формулами

$$g^2=\gamma_0(\gamma_0-1);\qquad \beta_0=\frac{j^2}{2\rho^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\rho^4}{j^4}}\right);$$

$$\lambda_0=2\beta_0\left(\gamma_0+\frac{1}{2}\right)+\gamma_0\frac{j^2}{\rho^2}=\frac{j^2}{\rho^2}\left[\left(\gamma_0+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\frac{4\rho^4}{j^4}}+2\gamma_0+\frac{1}{2}\right].$$

Таким образом, имеем следующую одну унифицированную формулу для уровней энергии СО $E_n(j)=\dfrac{\hbar\omega}{2}\lambda_n(j)$ на одномерных геометриях Кэли – Клейна $S_1(j)$ в размерных величинах:

$$\frac{E_n(j)}{\hbar\omega}=\left(2n+\gamma_0+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+j^4\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2R^4}}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{j^2}{R^2}\left[\left(2n+\gamma_0+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\gamma_0(\gamma_0-1)\right]. \tag{20}$$

Здесь первый, линейный по номеру n, член дает эквидистантный спектр энергии как в классическом случае, но слегка подправленный по величине с учетом кривизны. Второе слагаемое, квадратичное по номеру n, в явном виде зависит от наличия кривизны и ответственно за два факта: 1) не эквидистантность дискретного энергетического спектра; 2) его ограниченность на гиперболической прямой, где $j = i$. Предположение увеличения уровней энергии с ростом n: $E = E_0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_n$ ведет к условию

$$E_n-E_{n-1}=2\hbar\omega\sqrt{1+j^4\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2R^4}}+\frac{\hbar^2}{m}\frac{j^2}{R^2}(4n+2\gamma_0-1)>0.$$

Следовательно, на гиперболической прямой число дискретных уровней будет определяться неравенством

$$4n_{\max}<1-2\gamma_0+\sqrt{1+\frac{4m^2\omega^2R^4}{\hbar^2}}.$$

Другими словами, энергетический спектр будет различный в зависимости от наличия кривизны.

Из условия цепочки операторов Шредингера (18) следуют сплетающие соотношения для операторов H_n:

$$a_n^-(j)H_n(j) = H_{n+1}(j)a_n^-(j),$$

$$H_n(j)a_n^+(j) = a_n^+(j)H_{n+1}(j).$$

Учитывая их, легко получим, что для собственной функции гамильтониана $H\Psi_n(\xi;j) = E_n(\xi;j)\Psi_n(\xi;j)$ она будет иметь следующий вид:

$$\Psi_n(\xi;j) = a_0^+(j)a_1^+(j)\ldots a_{n-2}^+(j)a_{n-1}^+(j)\Psi_0^{(n)}(\xi;j).$$

Здесь волновая функция $\Psi_0^{(n)}(\xi;j)$ является собственной функции гамильтониана $H_n(\xi;j)\Psi_0^{(n)}(\xi;j) = E_n(\xi;j)\Psi_0^{(n)}(\xi;j)$ и находится из условия

$$a_n^-(j)\Psi_0^{(n)}(\xi;j) = 0,$$

т. е.

$$\left(\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} + \beta_n\xi - \frac{\gamma_n}{\xi}\right)\Psi_0^{(n)}(\xi;j) = 0. \tag{21}$$

Решение уравнения (21) имеет следующий вид:

$$\Psi_0^{(n)}(\xi;j) = C_0^{(n)}(j)\xi^{\gamma_n(j)}\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{\gamma_n(j)}{2} - \beta_n(j)\frac{\rho^2}{j^2}}.$$

В частности, для первого возбужденного уровня $n = 1$ получим

$$\Psi_1(\xi;j) = a_0^+(j)\Psi_0^{(1)}(\xi;j) = a_0^+(j)\xi^{\gamma_1(j)}\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{\gamma_1(j)}{2} - \beta_1(j)\frac{\rho^2}{j^2}}$$

или

$$\Psi_1(\xi;j) = C_1(j)\left(\xi\left[2\beta_0 + \frac{j^2}{\rho^2}\right] - \frac{[2\gamma_0 + 1]}{\xi}\right)\xi^{\gamma_1(j)}\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{\gamma_1(j)}{2} - \beta_1(j)\frac{\rho^2}{j^2}}.$$

Действуя аналогичным образом, найдем волновые функции других возбужденных состояний.

Заключение. Рассмотрен симметрийный аспект задачи о ГО на гиперболе как одномерном пространстве постоянной отрицательной кривизны H_1 с разных ракурсов. Во-первых, с помощью результата работы [13] о том, что для алгебраического описания обсуждаемой задачи можно применить сложение двух независимых экземпляров алгебры *SU*(1,1) различных дискретных серий, показана независимость алгебры скрытой (динамической) симметрии в виде так называемой алгебры Хана *QH*(3) и ее параметров от выбора различных самосопряженных неприводимых представлений алгебры *SU*(1,1). Во-вторых, метод факторизации позволил найти энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний для модели СО в одномерных геометриях Кэли – Клейна. Полученная формула для уровней энергии имеет аддитивный вклад от слагаемых как линейных, так квадратичных по номеру *n*. В обоих слагаемых есть зависимость от наличия кривизны. Спектр имеет верхнюю границу на гиперболической прямой.

Список использованных источников

1. Genest, V. X. Superintegrability in Two Dimensions and the Racah – Wilson Algebra / V. X. Genest, L. Vinet, A. S. Zhedanov // Lett. Math. Phys. – 2014. – Vol. 104. – P. 931–952. https://doi.org/10.1007/s11005-014-0697-y

2. The Racah algebra: An overview and recent results LANL [Electronic resource] / H. D. Bie [et al.] // Arxiv [Preprint]. – 2020. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/2001.11195. https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.11195

3. Cariñena, J. F. The quantum harmonic oscillator on the sphere and the hyperbolic plane / J. F. Cariñena, M. F. Rañada, M. Santander // Ann. Phys. – 2007. – Vol. 322, № 10. – P. 2249–2278. https://doi.org/10.1016/j.aop.2006.10.010

4. Cariñena, J. F. The quantum free particle on spherical and hyperbolic spaces: A curvature dependent approach / J. F. Cariñena, M. F. Rañada, M. Santander // J. Math. Phys. – 2011. – Vol. 52, № 7. – P. 072104. https://doi.org/10.1063/1.3610674

5. Alonso, M. A. Wigner functions for curved spaces. I. On hyperboloids / M. A. Alonso, G. S. Pogosyan, K. B. Wolf // J. Math. Phys. – 2002. – Vol. 43. – P. 5857–5871. https://doi.org/10.1063/1.1518139

6. Burdik, C. Two exactly-solvable problems in one-dimensional hyperbolic space / C. Burdik, G. S. Pogosyan // Lie Theory and Its Applications in Physics: Proc. V Int. Workshop, Varna, Bulgaria, 16–22 June 2003. – P. 294–300. https://doi.org/10.1142/9789812702562_0018

7. Громов, Н. А. Квантовая механика на одномерных геометриях Кэли – Клейна / Н. А. Громов, В. В. Куратов // Изв. Коми науч. центра УрО РАН. – 2017. – Вып. 2 (30). – С. 5–11.

8. Schrödinger, E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish. Soc. A. – 1940. – Vol. 46A. – P. 9–16.

9. Infeld, L. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature / L. Infeld, A. Schild // Phys. Rev. – 1945. – Vol. 67, № 3–4. – P. 121–122. https://doi.org/10.1103/physrev.67.121

10. Higgs, P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I / P. W. Higgs // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12, № 4. – P. 309–323. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/3/006

11. Курочкин, Ю. А. Аналог вектора Рунге – Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере / Ю. А. Курочкин, В. С. Отчик // Докл. Акад. наук БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 987–990.

12. Богуш, А. А. О квантовомеханической задаче Кеплера в трехмерном пространстве Лобачевского / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин, В. С. Отчик // Докл. Акад. наук БССР. – 1980. – Т. 24, № 1. – С. 19–22.

13. Basu, D. The Clebsch–Gordan coefficients of the three-dimensional Lorentz algebra in the parabolic basis / D. Basu, K. B. Wolf // J. Math. Phys. – 1983. – Vol. 24, № 3. – P. 478–500. https://doi.org/10.1063/1.525745

14. Zhedanov, A. S. Hidden symmetry algebra and overlap coefficients for two ring-shaped potentials / A. S. Zhedanov // J. Phys. A: Gen. Phys. – 1993. – Vol. 26, № 18. – P. 4633–4641. https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/18/027

References

1. Genest V. X., Vinet L., Zhedanov A. S. Superintegrability in Two Dimensions and the Racah – Wilson Algebra. *Letters* in *Mathematical Physics*, 2014, vol. 104, pp. 931–952. https://doi.org/10.1007/s11005-014-0697-y

2. Bie H. D., Iliev P., Vijver W., Vinet L. The Racah algebra: An overview and recent results LANL. *Arxiv* [Preprint], 2020. Available at: https://arxiv.org/abs/2001.11195. https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.11195

3. Cariñena J. F., Rañada M. F., Santander M. The quantum harmonic oscillator on the sphere and the hyperbolic plane. *Annals of Physics*, 2007, vol. 322, no. 10, pp. 2249–2278. https://doi.org/10.1016/j.aop.2006.10.010

4. Cariñena J. F., Rañada M. F., Santander M. The quantum free particle on spherical and hyperbolic spaces: A curvature dependent approach. *Journal of Mathematics and Physics*, 2011, vol. 52, pp. 072104. https://doi.org/doi.org/10.1063/1.3610674

5. Alonso M. A., Pogosyan G. S., Wolf K. B. Wigner functions for curved spaces. I. On hyperboloids. *Journal of Mathematics and Physics*, 2002, vol. 43, no. 7, pp. 5857–5871. https://doi.org/10.1063/1.1518139

6. Burdik C., Pogosyan G. S. Two exactly-solvable problems in one-dimensional hyperbolic space. *Lie Theory and Its Applications in Physics. Proceedings of the Vth International Workshop, Varna, Bulgaria, 16–22 June 2003*, pp. 294–300. https://doi.org/10.1142/9789812702562_0018

7. Gromov N. A., Kuratov V. V. Quantum mechanics on one-dimentional Cayley – Klein geometries. *Izvestiya Komi nauchnogo tsentra UrO RAN – Proceedings of the Komi science centre Ural branch Russian Academy of sciences*, 2017, no. 2 (30), pp. 5–11 (in Russian).

8. Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1940, vol. 46A, pp. 9–16.

9. Infeld L., Schild A. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature. *Physical Review*, 1945, vol. 67, no. 3–4, pp. 121–122. https://doi.org/10.1103/physrev.67.121

10. Higgs P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I. *Journal of Physics A*, 1979, vol. 12, no. 4, pp. 309–323. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/3/006

11. Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. Analog of the Runge – Lenz vector and energy spectrum in the Kepler problem on a three-dimensional sphere. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1979, vol. 23, no. 11, pp. 987–990 (in Russian).

12. Bogush A. A., Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. The quantum-mechanical Kepler problem in three-dimensional Lobačevskiĭ space. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1980, vol. 24, no. 1, pp. 19–22 (in Russian).

13. Basu D., Wolf K. B. The Clebsch–Gordan coefficients of the three-dimensional Lorentz algebra in the parabolic basis. *Journal of Mathematics and Physics*, 1983, vol. 24, no. 3, pp. 478–500. https://doi.org/10.1063/1.525745

14. Zhedanov A. S. Hidden symmetry algebra and overlap coefficients for two ring-shaped potentials. *Journal of Physics A: General Physics*, 1993, vol. 26, no. 18, pp. 4633–4641. https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/18/027

Информация об авторах

Лаврёнов Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики, Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка (ул. Советская, 18, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lanin0777@mail.ru. https://orcid.org/0000-0001-7384-3621

Лаврёнов Иван Александрович – ведущий специалист, ООО «Октонион технолоджи» (ул. Я. Купалы, 25, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lanin99@mail.ru. https://orcid.org/0000-0002-3650-8987

Information about the authors

Alexandre N. Lavrenov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Informatics and Methods of Teaching Informatics, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank (18, Sovetskaya Str., 220050, Minsk Republic of Belarus). E-mail: lanin0777@mail.ru. https://orcid.org/0000-0001-7384-3621

Ivan A. Lavrenov – Leading Specialist, Octonion Technology Ltd. (25, Y. Kupala Str., 220030, Minsk Republic of Belarus). E-mail: lanin99@mail.ru. https://orcid.org/0000-0002-3650-8987