

УДК [372.851:511.11]:37.026.3

**ПРОБЛЕМА УСТРАНЕНИЯ ФРАГМЕНТАРНОСТИ
ЗНАНИЙ О ЧИСЛАХ И ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВАХ
В ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ И БУДУЩИХ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ**

В. С. Миналто

*УО «Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка»;*

Минск (Республика Беларусь)

Науч. рук. – Е. П. Кузнецова, к.п.н., доцент

**THE PROBLEM OF ELIMINATING
THE FRAGMENTATION OF KNOWLEDGE
ABOUT NUMBERS AND NUMERICAL SETS
IN THE TEACHING OF SCHOOL CHILDREN
AND FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS**

V. S. Minalto

Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank;

Minsk (Republic of Belarus)

Scientific adviser – E. P. Kuzniatsova, Dr. PhD, associate professor

Выявлены причины фрагментарности знаний о числах и числовых множествах, получаемых при обучении математике в учреждениях общего среднего образования и педагогических вузах; указаны результаты проверки студентов на знание свойств числовых множеств; предложены пути решения проблемы.

The reasons for the fragmentation of knowledge about numbers and numerical sets in the mathematical education of schools and pedagogical universities are revealed; the results of checking students for knowledge of the properties of numerical sets are indicated; ways to solve the problem are proposed.

Ключевые слова: числа; свойства числовых множеств; фрагментарность знаний.

Keywords: numbers; properties of numerical sets; fragmentation of knowledge.

Содержательная линия «Числа и вычисления» традиционно занимает самое значительное место в школьном математическом образовании. В учреждениях общего среднего образования до VII класса у обучающихся на уроках математики формируются вычислительные навыки, числа и действия над ними являются основным предметом изучения. При систематическом изучении курса алгебры сведения о числовых множествах являются уже средством для изучения тождеств, уравнений, неравенств и функций, т. е. отдельно их почти не изучают. Возникшая фрагментарность знаний о числах и числовых множествах не позволяет обучающимся и, что более опасно, будущим учителям математики

осознанно воспринять мировоззренческие идеи, заложенные в школьном курсе математики. Детализируем актуальность этой проблемы для школьного математического образования Республики Беларусь:

1) изучение числовых множеств в учреждениях общего среднего образования Беларуси фактически оканчивается в VIII классе, где в соответствии с учебной программой по математике рассматриваются действия только над частью действительных чисел, а именно над алгебраическими иррациональными числами в виде квадратных корней;

2) полноценному завершению числовой линии на II ступени общего среднего образования препятствуют возрастные особенности обучающихся, поэтому теоретические сведения о числовых множествах ограничены лишь введением соответствующей символики, названий числовых множеств и соотношений между ними;

3) осознанное завершение линии «Числа и вычисления» на III ступени общего среднего образования не может быть реализовано, даже для наиболее способных и мотивированных обучающихся, из-за отсутствия необходимого более полного материала о числовых множествах (в учебной программе такая цель и не ставится).

Однако без завершенности числовой линии в школьном математическом образовании невозможна реализация ясно обозначенной в белорусских учебных программах для II и III ступеней общего среднего образования цели формирования у обучающихся «научного мировоззрения, познавательного интереса, предметных и метапредметных компетенций, логического мышления, интуиции, пространственного воображения, необходимых для становления личности, способной к самопознанию и саморазвитию» [1, с. 2], ведь осмысление основных идей и понятий о числах – фундамент научного мировоззрения.

При сложившихся в учреждениях общего среднего образования Беларуси обстоятельствах мотивированные обучающиеся могли бы познакомиться с особенностями и свойствами числовых множеств только на факультативных занятиях. Но программу и учебно-методическое обеспечение таких занятий предстоит еще создать и обосновать, поскольку на сайте Национального образовательного портала Республики Беларусь нет разработок факультативных занятий с подобным содержанием.

На осознании особенностей числовых множеств, их свойств (замкнутость, незамкнутость, упорядоченность, дискретность, плотность, полнота, счётность, несчётность) базируется понимание почти всех основных понятий как школьного курса математики, так и вузовских математических дисциплин. Например, понятие «предельная точка» является фундаментальным при

изучении теории пределов, – оно используется как для исследования функции, заданной аналитически, так и для вычисления площадей и объёмов различных геометрических тел. Учитель математики должен знать и уметь обосновывать с помощью свойств числовых множеств, что не любое бесконечное множество имеет предельную точку, например, её нет в множестве целых чисел [2].

Возникает вопрос: «Получает ли будущий учитель математики возможность при обучении в вузе тщательно, вдумчиво и достаточно полно изучить сведения о числовых множествах?». Результаты анализа действующих учебных планов учреждений высшего образования Беларуси, которые реализуют математическую подготовку будущих педагогов, свидетельствует о стратификации¹ студентов в возможности получить сведения о числах и числовых множествах. Элементы теории числовых систем неравномерно разбросаны по содержанию различных дисциплин, связанных с алгеброй, математическим анализом и вычислительной математикой. О результатах непродуктивной практики изучения обрывков сведений о числовых множествах пишет в предисловии книги [3] про числовые системы американский логик С. Феферман (1928–2016): «Каждый лектор ... выбирает из обширного материала то, что ему кажется наиболее важным, излагает его со своей точки зрения, иллюстрируя на классическом материале нужные ему идеи и конструкции. Естественно, что никакой цельной картины при этом, как правило, не возникает» [3, с. 12].

При анализе учебных планов ряда российских учреждений высшего образования педагогической направленности нами выявлено, что при подготовке будущих учителей математики в математике в некоторых из них изучается учебная дисциплина «Числовые системы». Так, на 3-м курсе Института математики и информатики Московского педагогического государственного университета на изучение материала этой учебной дисциплины отведено 108 часов [4]. Объём материала меньше, чем в книге С. Фефермана [3], но его достаточно, чтобы полноценно завершить числовую линию школьного курса.

На физико-математическом факультете БГПУ для студентов 3-го курса специальности «Математика и информатика» в соответствии с учебной программой учебной дисциплины «Методика обучения алгебре на III ступени общего среднего образования» отведено 4 часа лекций и 4 часа практических занятий по темам методики изучения числовых множеств (при совместном рассмотрении за эти же 8 часов вопросов обобщения понятия степени, корня n -

¹ В науке термин «неравенство» более известен как «стратификация». Само понятие объясняет различия в социальном положении человека, а также групп людей, их деление на слои (страты) в зависимости от социально-значимых критериев: профессия, доход, образование и т. д.

ой степени и метода математической индукции). В рейтинговую контрольную работу из этих тем были включены по 2 задания: на перечисление свойств одного из числовых множеств и на пояснение сути какого-либо свойства числовых множеств. Контрольную работу в марте 2024 года написали 44 студента, уже завершившие изучение учебных дисциплин: «Введение в математический анализ», «Математический анализ», «Алгебра» и «Алгебра многочленов и расширение полей», в каждой из которых есть материал о числовых множествах. Около 45% ответов, полученных на контрольной работе, можно считать близкими к верным, но полных правильных ответов на вопросы о числовых множествах – единицы (около 9%). Представления об отличиях дискретных числовых множеств от плотных множеств (плотных – от полных, счётных – от несчётных) у многих студентов оказались не сформированы даже на интуитивном уровне образов и/или содержательных ассоциаций.

Студентами – будущими педагогами в период обучения в учреждениях высшего образования практически не реализовано осознанное соотнесение различных числовых множеств с понятиями, например, математического анализа, элементы которого преподаются в X классе белорусских школ. Вследствие чего те факты и понятия математического анализа, которые были введены только для непрерывных функций (имеющих область определения числовые промежутки или всё множество R), студентами без раздумий переносятся (и, чаще всего, ошибочно) на функции, заданные на иных числовых множествах: N , Z , Q .

Как показал наш опыт работы с мотивированными обучающимися и с заинтересованными студентами, самыми непонятыми (не усвоенными и трудно осознаваемыми) остаются свойства множеств рациональных и действительных чисел, – Q и R , – наиболее востребованных в теории и практике. Понять и усвоить их достаточно абстрактные свойства может помочь систематическая демонстрация через задания связи основных понятий школьного курса математики и свойств разных числовых множеств, проявляющихся в соответствующих изменениях.

Задание. Укажите, какие свойства утратит функция, заданная на множестве R уравнением $y = x^2$, если поменять её область определения на множество всех рациональных чисел Q . В частности, выясните: сохранится ли у новой функции точка минимума?

Студенты 3–4-х курсов часто дают ошибочные ответы на подобные задания, поскольку не различают содержание, например, утверждений а) и б):

а) определение понятия точки минимума функции, в котором нет требования непрерывности функции;

б) признак точки минимума функции, который сформулирован для непрерывных функций.

Сравнение таких ситуаций, реализованное через систему соответствующих заданий, безусловно, способствует осмыслению особенностей числовых множеств Q и R , формированию верных представлений об их свойствах плотности и полноты, а также умению различать эти свойства. Возрастает и качество усвоения содержания остальных математических понятий.

Должен ли знать об этом каждый обучающийся? Ответ однозначный – нет. Но для будущих учителей эти знания являются обязательным профессиональным минимумом, и они должны быть усвоены именно на материале контекстных заданий, связанных с понятиями общеобразовательного курса математики.

Таким образом, проблема фрагментарности знаний о числах и числовых множествах, известная достаточно давно, характерна как для школьного математического образования, так и для обучения будущих учителей математики в учреждениях высшего образования. Устранение этой проблемы в Беларуси связано с целесообразностью разработки программы и учебно-методического обеспечения факультативных занятий о числовых множествах для мотивированных школьников. Для будущих учителей математики полагаем необходимым введение (аналогично практике педагогических вузов Российской Федерации) учебной дисциплины «Числовые системы» и разработку фонда контекстных заданий, формирующих более глубокие представления о свойствах числовых множеств при одновременном улучшении качества усвоения сути основных математических понятий.

Библиографические ссылки

1. Учебная программа по учебному предмету «Математика» [Электронный ресурс] // Национальный образовательный портал. – Режим доступа: https://adu.by/images/2023/08/matem/up_mat_10_rus_1.docx. – Дата доступа: 01.04.2024.
2. Александров, П. С. Введение в общую теорию множеств и функций / П. С. Александров. – М. – Л. : ОГИЗ Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1948. – 411 с.
3. Феферман, С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа / С. Феферман. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 440 с.
4. Учебный план специальности «Математика и Компьютерные науки» [Электронный ресурс] // Московский педагогический государственный университет – Режим доступа: <https://mpgu.su/wp-content/uploads/2021/06/44.03.05-Математика-и-Компьютерные-науки-2021-ОФО-1.pdf>. – Дата доступа: 01.04.2024.