Весці БДПУ. Серыя 3. 2024. № 2. С. 33–37

УДК 378.016:512.816.4-057.875:51

О РЕАЛИЗАЦИИ ЦЕЛОСТНОГО ПОДХОДА В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

О. А. Баркович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-1971-5440

Поступила в редакцию 16.10.2023.

UDC 378.016:512.816.4-057.875:51

ON HOLISTIC APPROACH REALIZATION IN THE PROCESS OF HIGHER ALGEBRA STUDY

O. Barkovich,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods teaching mathematics at the Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-1971-5440

Received on 16.10.2023.

В статье рассмотрены направления реализации целостного подхода в процессе обучения высшей алгебре в первом семестре первого курса путем укрупнения блоков, установления внутренних и междисциплинарных взаимосвязей в рамках новых учебных планов Республики Беларусь. Объединить учебный материал по высшей алгебре в единое целое позволяют: 1) хорошо продуманная последовательность изучения разделов высшей алгебры; 2) взаимосвязи, взаимодополняемость и параллели при их изучении; 3) использование идей симметрии при изложении нового материала; 4) представление учебного материала с опорой на свойства основных алгебраических структур. Подчеркивается, что для организации самостоятельной работы студентов целесообразно использовать интерактивные методы обучения и возможности современных компьютерных технологий, в частности, системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: целостный подход, высшая алгебра, лекция, практическое занятие, контролируемая самостоятельная работа, взаимосвязи, взаимодополняемость, параллели, симметрия, алгебраические структуры, новые учебные планы.

In the article the directions of holistic approach realization in the process of higher algebra study in the first semester of the first year by means of enlarging blocks, establishing internal and interdisciplinary relationships within the framework of new curricula of the Republic of Belarus are considered. It is possible to combine educational material on higher algebra into a whole by mean of: 1) a well-thought-out sequence of higher algebra sections; 2) relationships, complementarity and parallels in their study; 3) the use of symmetry ideas in the presentation of new material; 4) presentation of educational material based on the properties of basic algebraic structures. It is emphasized that in order to organize the independent work of students, it is advisable to use interactive teaching methods and the capabilities of modern computer technologies, in particular, the Maple computer mathematics system. The article considers the directions of implementing a holistic approach in the process of studying higher algebra in the first semester of the first year by enlarging blocks, establishing internal and interdisciplinary relationships within the framework of new curricula of the Republic of Belarus. It is possible to combine educational material on higher algebra into a single whole: 1) a well-thought-out sequence of studying the sections of higher algebra; 2) relationships, complementarity and parallels in their study; 3) the use of symmetry ideas in the presentation of new material; 4) presentation of educational material on the base of algebraic structures properties. It is emphasized that in order to organize the independent work of students, it is advisable to use interactive teaching methods and the capabilities of modern computer technologies, in particular, the computer mathematics system Maple.

Keywords: holistic approach, higher algebra, lecture, practical lessons, controlled independent work, relationships, complementarity, parallels, symmetry, algebraic structures, new curricula.

Введение. Учебная дисциплина «Высшая алгебра» занимает важное место в подготовке будущих учителей математики, так как некоторые вопросы курса высшей алгебры, например делимость на множестве целых чисел, свойства простых чисел, многочлены, изучаются в школе.

Согласно новому учебному плану «Высшая алгебра» входит в модуль «Высшая математика – 1», который относится к циклу специальных дисциплин государственного компонента. На изучение данной дисциплины в 1 и 2 семестрах 1 курса отведено 36 часов лекций и 64 часа практических занятий, на самостоятельную работу – 116 часов.

При таком распределении часов между лекциями, практическими занятиями и самостоятельной работой большое значение приобретает структурированное, сконцентрированное, тщательно продуманное целостное представление учебного материала на лекциях, позволяющее на практических занятиях и во время контролируемой самостоятельной работы решать компетентностно-ориентированные задачи различного уровня сложности.

Целостность, как справедливо отмечает О. А. Сотникова [1], является ведущим принципом построения (реализации) учебной дисциплины «Алгебра» в педагогическом университете. В своей статье она представляет концепцию раскрытия содержательных связей как связей целостного образования в курсе алгебры.

В [2] рассмотрены методологические особенности организации контролируемой самостоятельной работы студентов по формированию целостного понимания курса алгебры, его представления в виде единого целого, основанного на выявлении взаимосвязей и параллелей.

Основная часть. *О реализации целостного подхода в учебной программе по высшей алгебре.* Согласно новой учебной программе «Высшая алгебра» предполагает изучение в первом семестре следующих разделов: «Арифметика целых чисел», «Комплексные числа», «Многочлены от одной переменной»; «Группы, кольца, поля» [3]. Изучение этих разделов именно в такой последовательности позволяет реализовать наилучшим образом идею целостного подхода на начальном этапе изучения алгебры.

При изучении первого раздела студенты более глубоко, по сравнению со школьной программой, знакомятся со свойствами делимости целых чисел, одновременно овладевая методами изложения доказательств алгебраических утверждений.

В процессе преподавания второго раздела, «Комплексные числа», важно не только научить студентов выполнять действия над комплексными числами, но и показать естественность их появления:

1) построение системы чисел, содержащей систему действительных чисел и позволяющей решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом;
2) рассмотрение комплексных чисел как пар действительных чисел с соответствующим образом определенными операциями сложения и умножения;
3) геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций над ними, выполняемых как в алгебраической, так и в тригонометрической формах.

В [4] после системы комплексных чисел изучаются многочлены от одной переменной, фактически, алгебраические уравнения от одной неизвестной, но уже произвольной степени, что является естественным обобщением учебного материала предыдущего раздела.

Мы также считаем целесообразным после изучения комплексных чисел рассмотреть введение в теорию многочленов. Такой подход к изложению учебного материала позволяет не только систематизировать учебный материал, но и отобразить его более полно, естественно, целостно, сделать акцент на сущностные взаимосвязи между различными разделами алгебры в их динамике и развитии.

Действительно, с исторической точки зрения были попытки найти формулы для корней не только квадратных уравнений, уравнений третьей и четвертой степени, но и алгебраических уравнений более высоких степеней.

С другой точки зрения, в алгебре, одной из наиболее абстрактных учебных дисциплин математического цикла, иногда более важным является не столько нахождение корней, сколько вопрос их существования. Основная теорема алгебры утверждает, что «всякое уравнение с любыми числовыми коэффициентами, не только действительными, но и комплексными, имеет комплексные (быть может, в частности, действительные корни, причем корней этих, вообще говоря, даже столько, какова степень уравнения» [4, с. 8].

Отметим, что ранее в программах по учебной дисциплине «Алгебра» теорию многочленов изучали только на третьем курсе, что не способствовало установлению и развитию междисциплинарных взаимосвязей алгебры с математическим анализом.

Для приложений в других разделах высшей алгебры подробно представлен материал, связанный с разложением многочленов на неприводимые множители над числовыми системами действительных и комплексных чисел, а также рассмотрен алгоритм нахождения рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами.

Дополнительно отметим, что с целью овладения исследовательскими навыками, целостным подходом при решении алгебраических задач в программе предусмотрены параллели между некоторыми темами первого и второго разделов: делимость целых чисел и делимость многочленов, алгоритм Евклида для целых чисел и алгоритм Евклида для многочленов, взаимно простые числа и взаимно простые многочлены, простые числа и неприводимые многочлены имеют некоторые сходные черты и свойства.

После подробного изучения свойств делимости на множестве целых чисел доказательство аналогичных свойств для многочленов можно рассматривать как теоретические задачи на практических занятиях, сделав акцент на лекции только на отличительных моментах. Такой подход является наиболее целесообразным в условиях уменьшения общего числа часов на лекции по высшей алгебре.

В последнем разделе, изучаемом в первом семестре, «Группы, кольца, поля», и арифметика целых чисел, и комплексные числа, и многочлены от одной переменной рассматриваются с единой точки зрения, пронизывающей всю алгебру и объединяющей ее разные разделы, – с точки зрения алгебраических структур.

В первом семестре первого курса изучается учебный материал, являющийся, по сути, введением в высшую алгебру, поэтому рассматриваются только основные алгебраические структуры (группы, кольца, поля) и их простейшие свойства. Фактически, этот раздел является элементарным введением в абстрактную алгебру.

В этом разделе большое внимание уделяется рассмотрению примеров алгебраических структур с опорой на уже изученный в курсе высшей алгебры материал. Раздел «Группы, кольца, поля» является обобщением и актуализацией первых трех разделов.

На практических занятиях при изучении алгебраических структур акцент делается на решение теоретических задач типа: «Докажите, что указанное множество с естественной операцией умножения является группой. Какими свойствами она обладает?», «Является ли указанное множество с естественными операциями сложения и умножения кольцом или полем? Ответ обоснуйте».

В этом разделе доказывается, что:

1) множества целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел и комплексных чисел относительно обычных операций сложения и умножения являются кольцами (примеры так называемых числовых колец);
2) кольцо образует множество многочленов от одной переменной;
3) множество комплексных чисел является полем.

В множестве комплексных чисел рассматривается подмножество корней из единицы заданной степени, образующее мультипликативную группу. Обосновывается, что эта группа одновременно является циклической. На примере этой группы как модели изучаются свойства циклических групп.

С целью актуализации междисциплинарных связей высшей алгебры и аналитической геометрии рассматриваются следующие группы: группа вращений правильного многоугольника, группа симметрий правильного треугольника.

Представить курс высшей алгебры в целостном виде помогает использование идей симметрии при изложении нового материала, а также организация учебного материала с опорой на свойства основных алгебраических структур.

Идея симметрии как организующее начало при изучении высшей алгебры. Идея рассмотрения некоторых понятий алгебры с точки зрения симметрии принадлежит одному из крупнейших ученых XX века Герману Вейлю. Эта идея играет объединяющую роль в математике, придает ей целостный и законченный вид.

Рассмотрение понятий высшей алгебры с точки зрения симметрии на первом курсе привносит ощущение гармонии, порядка и красоты. По сути, теория групп является формализованным методом анализа систем, как абстрактных, так и физических, в которых присутствует симметрия. В [5] систематически изложена теория групп и рассмотрены ее физические приложения: соотношения симметрии в кристаллографии, механике, молекулярной спектроскопии, физике твердого тела, а также теории атомов, ядер и элементарных частиц.

Изучение некоторых тем курса высшей алгебры целесообразно проводить именно с точки зрения симметрии: 1) бинарная алгебраическая операция (например, если существует симметричный элемент относительно бинарной алгебраической операции, то он единственный); 2) группы преобразований правильных многоугольников; 3) симметрическая группа и ее подгруппы; 4) циклические группы и их подгруппы.

Теория групп обладает высокой степенью абстракции и иллюстрация теоретического материала на примерах, в которых присутствуют идеи симметрии, позволяет сформировать ясные и четкие представления у студентов.

Организация учебного материала с опорой на свойства основных алгебраических структур. Единство содержания курса высшей алгебры определяется понятием алгебраической структуры, что подразумевает постижение формализованного смысла, сущности изучаемых понятий, их отнесение к более абстрактным понятиям высшей алгебры, т. е. перевод конкретных конструкций на язык алгебраических структур.

Например, аддитивная группа, кольцо могут быть получены путем формализации системы целых чисел или множества многочленов, поле – путем формализации системы рациональных или комплексных чисел. Необходимо отметить, что каждая из последующих алгебраических структур в цепочке (группа, кольцо, поле) наследует свойства предыдущей структуры и является основой для построения более сложных объектов. Это позволяет использовать уже построенные интерпретации для приведения содержательных примеров.

Алгебраические структуры объединяют разнородные элементы предметного содержания учебной дисциплины «Высшая алгебра», превращаясь на завершающем этапе обучения в стройную математическую теорию.

В первом семестре при изучении высшей алгебры мы идем от конкретных примеров к понятию алгебраической структуры. Во втором семестре целесообразно изучать матрицы и линейные пространства, опираясь на свойства алгебраических структур.

Организация контролируемой самостоятельной работы студентов. Самостоятельная учебно-исследовательская деятельность органично «встраивается» в учебный процесс на любом этапе и при любой форме организации (лекция, практическое занятие, внеаудиторная работа). Для ее организации целесообразно использовать интерактивные методы обучения и возможности современных компьютерных технологий.

Умение, работая в команде, организовать эффективное взаимодействие в наши дни очень востребовано. Например, это может быть контролируемая самостоятельная работа над мини-проектами в мини-группах, позволяющая продемонстрировать студентам содержательные связи и параллели между теоретическими положениями курса высшей алгебры, научить их применять теоретические знания на практике. Значимость интерактивной формы работы в таком формате очевидна: взаимное обогащение участников мини-групп, межличностная коммуникация и рефлексия, благодаря которым устанавливается правильное отношение студентов к собственным действиям и обеспечивается адекватная коррекция этих действий.

Развитие информационных технологий открывает новые возможности для организации учебного процесса. Как показывает наш опыт, при изучении высшей алгебры целесообразно опираться при необходимости на систему компьютерной математики *Maple*, которая позволяет эффективно выполнять как символьные преобразования, так и вычисления без предварительного программирования. Например, с помощью этой системы можно: 1) отобразить геометрические построения на комплексной плоскости; 2) быстро выполнить промежуточные трудоемкие вычисления при решении учебно-исследовательских задач; 3) провести численный эксперимент с целью проверки правильности выдвигаемых гипотез.

Заключение. Как показывает анализ литературы и наш опыт, реализация целостного подхода при обучении высшей алгебре в первом семестре при подготовке к лекциям подтверждает свою эффективность и полезность. Организация самостоятельной работы студентов по структурированию учебного материала, в основном теоретического характера, выявлению в нем содержательных связей и параллелей позволяет более глубоко раскрыть содержание высшей алгебры и вовлечь большее число студентов в активную работу на лекциях.

Литература

1. *Сотникова, О. А.* Целостность как ведущий принцип построения (реализации) курса алгебры в педагогическом вузе (в рамках герменевтического подхода) / О. А. Сотникова // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена : психолого-педагогические науки (педагогика, психология, теория и методика обучения). – 2005. – № 5. – С. 311–319.
2. *Баркович, О. А.* Реализация целостного подхода при обучении алгебре студентов-математиков [Электронный ресурс] / О. А. Баркович // Педагогическое образование в условиях трансформационных процессов: новые требования к содержанию и результатам = Teacher education in the context of transformation process: new content and results requirements : материалы VIII Международной научно-практической конференции, г. Минск, БГПУ, 21 ноября 2018 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка; под науч. ред. А. В. Позняк. – Минск: БГПУ, 2019. – С. 16–21. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
3. *Баркович, О. А.* Учебная программа «Высшая алгебра» для специальности «Физико-математическое образование» [Электронный ресурс] / О. А. Баркович // Репозиторий БГПУ. – Режим доступа: http://elib.bspu.by/handle/doc/59544. – Дата доступа: 30.08.2023.
4. *Курош, А. Г.* Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. – 24-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2023. – 432 с.
5. *Артамонов, В. А.* Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. А. Артамонов, Ю. Л. Словохотов. – М. : Издательский центр «Академия», 2005. – 512 с.

Отметим, что вопросы реализации целостного подхода во втором семестре первого курса при изучении линейной алгебры требуют дополнительных исследований.

References

1. *Sotnikova, O. A.* Celostnost' kak vedushchij princip postroeniya (realizacii) kursa algebry v pedagogicheskom vuze (v ramkah germenevticheskogo podhoda) / O. A. Sotnikova // Izvestiya Rossijskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. A. I. Gercena : psihologo-pedagogicheskie nauki (pedagogika, psihologiya, teoriya i metodika obucheniya). – 2005. – № 5. – S. 311–319.
2. *Barkovich, O. A.* Realizaciya celostnogo podhoda pri obuchenii algebre studentov-matematikov [Elektronnyj resurs] / O. A. Barkovich // Pedagogicheskoe obrazovanie v usloviyah transformacionnyh processov: novye trebovaniya k soderzhaniyu i rezul'tatam = Teacher education in the context of transformation process: new content and results requirements : materialy VIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, g. Minsk, BGPU, 21 noyabrya 2018 g. / Belorus. gos. ped. un-t im. M. Tanka; pod nauch. red. A. V. Poznyak. – Minsk: BGPU, 2019. – S. 16–21. – 1 elektron. opt. disk (CD-ROM).
3. *Barkovich, O. A.* Uchebnaya programma «Vysshaya algebra» dlya special'nosti «Fiziko-matematicheskoe obrazovanie» [Elektronnyj resurs] / O. A. Barkovich // Repozitorij BGPU. – Rezhim dostupa: http://elib.bspu.by/handle/doc/59544. – Data dostupa: 30.08.2023.
4. *Kurosh, A. G.* Kurs vysshej algebry : uchebnik dlya vuzov / A. G. Kurosh. – 24-e izd., ster. – SPb. : Lan', 2023. – 432 s.
5. *Artamonov, V. A.* Gruppy i ih prilozheniya v fizike, himii, kristallografii : ucheb. posobie dlya stud. vyssh. ucheb. zavedenij / V. A. Artamonov, Yu. L. Slovohotov. – M. : Izdatel'skij centr «Akademiya», 2005. – 512 s.