

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 51:37.016–053.5

**УРБАН**

**Мария Анатольевна**

**МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА  
НАЧАЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УЧЕБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора педагогических наук

по специальности

13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (математика)

Минск, 2020

Работа выполнена в учреждении образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»

Научный консультант	<b>Истомина-Кастровская Наталия Борисовна,</b> доктор педагогических наук, профессор, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования
Официальные оппоненты:	<b>Далингер Виктор Алексеевич,</b> доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и методики обучения математике ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет»  <b>Булдык Георгий Митрофанович,</b> доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и физики УО «Белорусская государственная академия связи»  <b>Майсеня Людмила Иосифовна,</b> доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой физико-математических дисциплин Института информационных технологий УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Оппонирующая организация	<b>НМУ «Национальный институт образования» Министерства образования Республики Беларусь</b>

Защита состоится 11 июня 2020 года в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.23 при Белорусском государственном университете по адресу: г. Минск, ул. Ленинградская 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407. Телефон ученого секретаря: 226-55-41.

Почтовый адрес: пр-т Независимости 4, Минск, 220030.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан 8 мая 2020 года.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций

В. Г. Кротов

## ВВЕДЕНИЕ

В условиях глобальной информатизации, стремительного обновления знаний возрастают требования к качеству образования на всех его ступенях. Новая образовательная парадигма акцентирует внимание на освоение учащимися способов действий, обеспечивающих повышение уровня образовательной и прикладной компетентности. В связи с этим возрастает актуальность педагогических исследований, направленных на решение задач усвоения практико-ориентированных предметных знаний, формирования у обучающихся метапредметных компетенций, умений самостоятельно получать знания и применять их в жизненных ситуациях.

В образовательном стандарте начального образования и учебной программе учебного предмета «Математика» для I ступени общего среднего образования Республики Беларусь отмечается значимость метапредметной направленности обучения и интеллектуального развития учащихся. Одним из методов обучения математике на I ступени общего среднего образования, имеющим универсальный характер, является *учебное моделирование*. Сущность этого метода заключается в овладении учащимися учебным материалом с помощью учебных моделей реальных и математических объектов.

Первоначально учебное моделирование развивалось в рамках проблемы использования наглядности в обучении. В XVIII веке в фундаментальных трудах И. Г. Песталоцци, Ф. А. В. Дистервега, позднее – в работах П. С. Гурьева, А. В. Грубе, В. А. Лая, В. А. Евтушевского, А. И. Гольденберга и др. отмечалась важность применения наглядных пособий в обучении элементарному курсу арифметики. Результаты осуществленных в XX веке фундаментальных исследований философов (К. Б. Батороев, М. Вартофски, Ю. А. Гастев, К. Е. Морозов, И. Б. Новик, В. С. Стёпин, А. И. Уёмов, В. А. Штофф и др.), психологов и педагогов (Р. Арнхейм, С. И. Архангельский, С. П. Баранов, В. П. Беспалько, М. Вертгеймер, Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, В. П. Мизинцев, В. Ф. Паламарчук, Н. Г. Салмина, Н. Ф. Талызина, Л. М. Фридман, и др.) по изучению проблемы использования моделирования в научном и учебном познании явились основой совершенствования методики преподавания математики в начальной школе.

Ученые-методисты (К. О. Ананченко, М. Г. Бартолини Бусси, Н. В. Бровка, Г. М. Булдык, Н. Я. Виленкин, В. А. Далингер, В. Л. Дрозд, О. А. Ивашова, Л. Инглиш, Н. Б. Истомина-Кастровская, З. К. Левчук, Л. И. Майсеня, М. А. Мариотти, В. Н. Медведская, О. И. Мельников, М. И. Моро, И. А. Новик, Л. Г. Петерсон, З. Семадени, А. Н. Сендер, А. А. Столяр и др.) подчеркивали значительные возможности учебного моделирования для реализации идеи развития личности учащегося в процессе

обучения математике на всех ступенях образования, поскольку этот метод сближает учебное познание с научным.

Активное исследование отдельных методических аспектов применения учебных моделей на уроках математики в начальной школе начинается в последней четверти XX века. Наряду с традиционными сюжетными иллюстрациями в ряде учебных пособий появляются примеры использования схематической наглядности (А. К. Артёмов, А. В. Белошистая, Г. В. Бельтюкова, Н. Я. Виленкин, В. Л. Дрозд, Н. Б. Истомина-Кастровская, А. Т. Катасонова, Л. В. Лещенко, М. И. Моро, Л. Г. Петерсон, А. А. Столяр, Т. М. Чеботаревская и др.).

В начале XXI века в Республике Беларусь учебное моделирование приобрело статус официально признанного метода обучения, его роль была подчеркнута в концепции и образовательном стандарте учебного предмета «Математика», утвержденных в 2009 г. Это способствовало повышению интереса учителей начальных классов к применению учебных моделей на уроках математики, однако до настоящего времени практика использования учебного моделирования в школе носила эпизодический, несистемный и, вследствие этого, недостаточно эффективный характер.

Для того чтобы педагоги начальной школы смогли реализовать в полной мере образовательный и развивающий потенциал метода учебного моделирования, необходимо определить теоретические основания этого метода обучения, сформулировать принципы и разработать методические рекомендации, выводящие его на уровень педагогической технологии. Однако нами не обнаружено фундаментальных исследований, посвященных выявлению теоретических оснований применения метода учебного моделирования в процессе обучения математике на I ступени общего среднего образования и систематизации практики его применения в начальной школе.

Необходимость исследования проблемы эффективного использования учебного моделирования в обучении математике на I ступени общего среднего образования обусловлена рядом противоречий:

- между научной обоснованностью целесообразности применения отдельных аспектов учебного моделирования в начальной школе и отсутствием целостного представления о теоретических основаниях обучения математике с использованием учебного моделирования, определяющих его цели;

- между разработанностью дидактических принципов методики обучения математике на I ступени общего среднего образования и отсутствием теоретически обоснованной концепции обучения математике с использованием учебного моделирования;

– между необходимостью обогащения содержания обучения математике на I ступени общего среднего образования комплексом общеучебных умений, включающим и умение моделировать, и неразработанностью методической системы, обеспечивающей формирование у обучающихся умения моделировать реальные и математические объекты;

– между требованиями образовательного стандарта начального образования и учебной программы учебного предмета «Математика» для I ступени общего среднего образования по развитию общеучебных умений учащихся и фрагментарностью их реализации в практике обучения.

Указанные противоречия обусловили выбор научной проблемы исследования, состоящей в теоретическом обосновании и практической проверке эффективности использования учебного моделирования в качестве метода обучения математике на I ступени общего среднего образования (далее, по традиционной терминологии – метода *начального обучения математике*). В рамках сформулированной проблемы актуальными являются разработка концепции и методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования (теоретический аспект исследования), учебно-методического обеспечения начального обучения математике в Республике Беларусь (прикладной аспект исследования). Необходимость решения указанной проблемы определила выбор темы исследования «Методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования».

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Диссертационное исследование связано с научными программами и проектами, выполненными в НМУ «Национальный институт образования» Министерства образования Республики Беларусь, ГУО «Академия последиplomного образования», УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»: Государственная программа «Комплексная информатизация системы образования Республики Беларусь на 2007–2010 годы» (утверждена постановлением Совета Министров Республики Беларусь № 265 от 01.03.2007, зарегистрирована в Национальном реестре правовых актов Республики Беларусь 13 марта 2007 года, N 5/24853); отраслевая научно-техническая программа «Качество образования» на 2015–2017 годы (номер государственной регистрации 20150851); отраслевая научно-техническая программа «Модернизация содержания и учебно-методического обеспечения дошкольного, общего среднего, специального, высшего

педагогического и дополнительного образования педагогических работников в целях повышения качества образования» («Качество образования») на 2015–2017 годы (номер государственной регистрации 20151237); отраслевая научно-техническая программа «Разработка электронных образовательных ресурсов для дошкольного, общего среднего, специального, высшего педагогического и дополнительного образования педагогических работников» («Электронные образовательные ресурсы») на 2012–2014 годы (номер государственной регистрации 20122551); инновационный проект «Внедрение комплекса интерактивных компьютерных моделей в процесс начального математического образования», 2011–2013 годы (приказ № 450 Министерства образования Республики Беларусь «Об утверждении перечня учреждений образования, на базе которых осуществляется экспериментальная и инновационная деятельность»).

### **Цель и задачи исследования**

**Цель исследования:** теоретически обосновать, разработать и реализовать в образовательной практике методическую систему начального обучения математике с использованием учебного моделирования.

Для достижения цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- 1) определить теоретические основания начального обучения математике с использованием учебного моделирования;
- 2) разработать концепцию начального обучения математике с использованием учебного моделирования;
- 3) создать методическую систему начального обучения математике с использованием учебного моделирования;
- 4) реализовать методическую систему начального обучения математике с использованием учебного моделирования в учебно-методическом комплексе по учебному предмету «Математика» и экспериментально проверить его эффективность.

### **Научная новизна**

1. Впервые определены *теоретические основания* начального обучения математике с использованием учебного моделирования – *гносеологические, психолого-педагогические и методические*. *Гносеологические* основания позволяют трактовать учебное моделирование как адаптированный к условиям школьного обучения универсальный метод научного моделирования и установить соответствие этапов учебного и научного моделирования. *Психолого-педагогические* основания определяют возможность и целесообразность использования учебного моделирования в процессе

начального обучения математике с учетом возрастных особенностей младших школьников (наглядно-образное мышление, потребность в практических действиях и кинестетических ощущениях, произвольный характер познавательных процессов). *Методические* основания позволяют рассматривать учебное моделирование как средство и цель начального обучения математике.

Впервые установлены *исторические этапы* генезиса метода учебного моделирования в обучении математике учащихся начальных классов, которые отражают развитие приоритетных методических идей и связанных с ними особенностей реализации принципа наглядности обучения, а также характеризуют эволюцию взглядов на сущность понятий «учебная модель» и «учебное моделирование» в теории и практике начального обучения математике в период с XVII до начала XXI века.

В исследовании на основе выполненного анализа уточнены понятия «*учебная модель*» и «*учебное моделирование*» с учетом предметной области и ступени образования.

2. Впервые разработана *концепция* начального обучения математике с использованием учебного моделирования. В основу концепции положена идея отражения в учебном моделировании этапов метода математического моделирования. Сформулированные *закономерности, принципы и теоретические положения* концепции позволяют осуществлять обучение младших школьников математике на основе учебного моделирования и формировать у них умение моделировать реальные и математические объекты.

3. Создана новая *методическая система* начального обучения математике с использованием учебного моделирования, в структуру которой входят *целевой, содержательный, процессуальный и контрольный* компоненты. В разработанной методической системе реализована направленность не только на достижение целей обучения учащихся предметному содержанию, но и на формирование у выпускника начальной школы умения самостоятельно строить учебные модели реальных и математических объектов.

Новизна методической системы заключается в следующем:

- выделены *гностическая, деятельностно-компетентностная и личностная* составляющие цели начального обучения математике с использованием учебного моделирования;
- уточнен перечень *моделирующих умений*, входящих в состав умения моделировать и соответствующих этапам применения математического моделирования;
- выделены *приемы*, входящие в состав метода учебного моделирования и соответствующие моделирующим умениям;

- дополнен *диагностической* функцией перечень функций учебной модели;
- создана *классификация* учебных моделей, основанная на логике их использования учителем в процессе обучения;
- разработаны *методика формирования и методика диагностики* умения моделировать в начальном обучении математике;
- выделены *формы взаимодействия* учителя и учащихся при использовании учебного моделирования на уроках математики в начальной школе;
- сформулированы *критерии оценки эффективности* методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования.

4. Впервые экспериментально доказано, что применение в школьной практике разработанного в ходе исследования *учебно-методического комплекса* по учебному предмету «Математика», в котором реализована методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования, позволяет повысить эффективность обучения математике на I ступени общего среднего образования и сформировать у обучающихся на доступном их возрасту уровне умение моделировать реальные и математические объекты.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. *Теоретические основания* начального обучения математике с использованием учебного моделирования представляют собой совокупность:

- *гносеологических* оснований, включающих теории, которые дают философское осмысление метода моделирования в научном познании и позволяют рассматривать учебное моделирование как дидактическую проекцию универсального метода научного моделирования, а учебную модель – как модель, используемую с целью усвоения изучаемого математического материала;

- *психолого-педагогических* оснований, представленных психологическими теориями (о семиотической функции сознания и роли визуального мышления в процессе усвоения знаний учащимися, моделировании как компоненте учебной и виде знаково-символической деятельности), педагогическими подходами (системный, личностно-ориентированный, деятельностный, компетентностный) и положениями (о сущности и классификации методов обучения и общеучебных умений учащихся, моделировании как методе и приеме обучения), которые обосновывают возможность и целесообразность использования в начальном

обучении математике учебного моделирования, обеспечивающего деятельностный характер обучения и опору на наглядно-образное мышление учащихся начальных классов;

– *методических* оснований, отражающих результаты анализа развития приоритетных методических идей, а также эволюцию взглядов на сущность понятий «учебная модель» и «учебное моделирование» на протяжении шести этапов генезиса метода учебного моделирования в начальном обучении математике в период с XVII по начало XXI века и определяющих разработку содержания начального математического образования, где учебное моделирование рассматривается и как средство формирования предметных знаний и умений, и как планируемый результат начального обучения математике.

2. Разработанная *концепция* базируется на методической идее соотнесения учебного моделирования в начальном обучении математике с методом математического моделирования, обеспечивает направленность обучения как на достижение предметных результатов, так и на формирование у обучающихся умения моделировать реальные и математические объекты и включает в себя:

– выделенные в ходе исследования две группы *закономерностей* начального обучения математике с использованием учебного моделирования (первая группа связана с достижением предметных результатов обучения, вторая группа – с формированием у обучающихся умения моделировать);

– соответствующие выделенным закономерностям *принципы* первой группы (теоретической осмысленности, репрезентационной вариативности, приоритета визуальных учебных моделей на начальном этапе обучения, полимодельного перевода на этапе закрепления учебного математического материала, дополнения содержательных учебных моделей процессуальными) и второй группы (активного моделирования, сочетания статического и динамического моделирования, поэтапного формирования умения моделировать, функциональной дифференциации учебных моделей на различных этапах формирования умения моделировать, единства диагностической и эвристической функций учебных моделей в процессе диагностики умения моделировать);

– *теоретические положения*, являющиеся фундаментом методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования, в которых реализованы сформулированные в ходе исследования принципы.

3. *Методическая система* начального обучения математике с использованием учебного моделирования включает в себя следующие компоненты:

- *целевой* (цель начального обучения математике с использованием учебного моделирования, имеющая гностическую, деятельностно-компетентностную и личностную составляющие);

- *содержательный* (перечень умений, указанных в учебной программе начального обучения математике, дополненный умением моделировать, формирование которого предполагает освоение моделирующих умений, входящих в его состав);

- *процессуальный* (перечень функций учебной модели, дополненный диагностической функцией; классификация учебных моделей по трем основаниям – виду моделируемого объекта, средствам репрезентации, способу работы с учебной моделью; методика формирования у обучающихся умения моделировать с помощью комплекса заданий на соотнесение, выбор, дополнение, построение и преобразование учебной модели; приемы, входящие в состав метода учебного моделирования и соответствующие моделирующим умениям; формы взаимодействия учителя и учащихся при использовании учебного моделирования, выделенные с учетом вариантов сочетания наглядно-практических и словесных приемов метода учебного моделирования);

- *контрольный* (критерии оценки эффективности методической системы – обученность учащихся в предметной области, сформированность у них умения моделировать, начальная математическая компетентность, мотивация учащихся к изучению учебного предмета «Математика»).

4. Применение в образовательном процессе *учебно-методического комплекса* по учебному предмету «Математика» для I ступени общего среднего образования (учебные пособия, рабочие тетради, тетради для самостоятельных и контрольных работ, тетради для стимулирующих занятий, электронное средство обучения «Математика. 2–4 классы», учебно-методические пособия для учителей с грифами Министерства образования Республики Беларусь и Национального института образования Министерства образования Республики Беларусь), в котором реализована методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования, позволяет:

- обеспечить достижение более высоких уровней овладения учащимися учебным математическим материалом;

- сформировать у выпускника начальной школы умение моделировать реальные и математические объекты на доступном для него уровне.

### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Указанные в исследовании научно-методические результаты получены лично соискателем: определены теоретические основания начального обучения математике с использованием учебного моделирования; разработаны концепция и методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования; созданы разделы учебно-методического комплекса по математике для I ступени общего среднего образования, связанные с использованием учебных моделей и формированием умения моделировать; разработана методика формирования умения моделировать и методика его диагностики у обучающихся; проведен многолетний педагогический эксперимент, в ходе которого доказана эффективность внедрения в образовательный процесс начальной школы разработанной методической системы. Вклад соавторов совместных публикаций не имеет непосредственного отношения к результатам диссертационного исследования. Вклад автора в публикациях с соавторами определяется рамками излагаемых в диссертации результатов.

### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Апробация диссертации осуществлялась в процессе представления теоретических положений и научно-практических результатов исследования на республиканских и международных конференциях в Армении, Беларуси, Болгарии, Польше, России, Украине, Эстонии. В частности, на международной научно-практической конференции «Развивающие технологии в общем и специальном образовании» (Коломна, 2009 г.); международной научно-методической конференции «Проблемы математического образования» (Черкассы, 2010 г.); VII всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Артемовские чтения. Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (Пенза, 2011 г.); XLVIII всероссийской с международным участием конференции «Математическое образование и информационное общество: проблемы и перспективы» (Москва, 2012 г.); всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современное начальное образование: ВУЗ – Школа» (Москва, 2012 г.); II международной научно-практической конференции «Подготовка учителя начальных классов: проблемы и перспективы» (Минск, 2012 г.), международной конференции «Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании» (Москва, 2013 г.); XII международной научной конференции «Edukacja kuprzyszłości – perspektywę i problemy» (Образование будущего – перспективы и проблемы, Польша, Седльце, 2014 г.); XIV международной

научной конференции «Психолого-педагогически проблеми на развитието на личността на професионалиста в условията на университетското образование» (Психолого-педагогические проблемы развития личности профессионала в условиях университетского образования, Болгария, Китев, 2014 г.); международной конференции «Pathways to the future: education for sustainable development» (Пути к будущему: образование в интересах устойчивого развития) (Эстония, Таллинн, 2015 г.); международной конференции «BUP Teachers Conference on Education for Sustainable Development» (Конференция преподавателей Балтийской университетской программы по образованию в интересах устойчивого развития, Польша, Рогов, 2016 г.); международной научно-практической конференции «Проблемы современного учебника» (Минск, 2018 г.) и ряде других.

Результаты диссертации использованы в процессе разработки концепции учебного предмета «Математика», образовательного стандарта начального образования и учебной программы учебного предмета «Математика» для I ступени общего среднего образования, что подтверждается справкой Национального института образования Министерства образования Республики Беларусь. На основе результатов исследования был разработан учебно-методический комплекс по математике для I ступени общего среднего образования, который используется в начальных классах Республики Беларусь с 2011 г. Результаты исследования внедрены в процесс подготовки учителей начальных классов на факультете начального образования Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка и на факультетах подготовки учителей начальных классов в учреждениях высшего образования Республики Беларусь, а также в учреждениях, осуществляющих повышение квалификации учителей начальных классов. Использование результатов диссертации подтверждается 24 актами о внедрении результатов исследования.

### **Опубликованность результатов диссертации**

Основные результаты диссертации отражены в 93 публикациях, из которых: 1 монография (объемом 11,6 авторского листа), 24 статьи в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 11,3 авторских листа, из них принадлежит соискателю 9,1 авторских листа); 5 статей в других научных изданиях, 11 статей в сборниках материалов научных конференций, 11 тезисов докладов, 39 учебных и учебно-методических пособий, 2 учебные программы для учреждений высшего образования.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения, библиографического списка и приложений. Полный объем диссертации составляет 361 страницу, в том числе 29 рисунков занимают 8 страниц, 24 таблицы на 11 страницах, 21 приложение занимает 126 страниц, библиографический список (412 наименований, включая собственные публикации соискателя ученой степени) – 35 страниц.

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

**В первой главе** «Теоретические основания начального обучения математике с использованием учебного моделирования» представлены *гносеологические, психолого-педагогические и методические* теории, положения и концептуальные подходы, которые стали фундаментом разработанной концепции и методической системы.

*Гносеологические основания* позволяют рассматривать учебное моделирование как дидактическую проекцию универсального метода научного моделирования. В современном философском дискурсе в понятии «модель» фиксируется ее ключевое предназначение – замещение объекта исследования. Модель не просто отражает прототип, а фокусирует внимание на его значимых свойствах, благодаря чему исследователь получает возможность открывать новую информацию о моделируемом объекте (М. Вартофски, Ю. А. Гастев, Б. А. Глинский, Б. С. Грязнов, Г. Клаус, В. А. Штофф и др.). На основе выполненного анализа философских работ мы трактуем учебную модель как *вид модели в ее гносеологическом значении* в отличие от распространенных в психолого-педагогическом и методическом дискурсе определений этого понятия, где учебную модель называют изображением, объектом, аналогом, наглядным средством усвоения, схематизированным образом и др.

Под моделированием в философских исследованиях понимают метод познания действительности, основанный на использовании моделей. Процесс применения метода моделирования в научном познании представляет собой последовательность этапов, связанных с выбором/построением модели, исследованием модели и переносом полученной на модели информации на прототип (К. Б. Батороев, К. Е. Морозов, И. Б. Новик, Ю. М. Плотинский и др.). Соответственно учебное моделирование определяется в исследовании как *вид моделирования в его гносеологическом значении* в отличие от трактовок этого понятия, предложенных в проанализированных психолого-педагогических и методических источниках, где учебное моделирование определяют как прием учебной работы, учебное действие, способ построения

модели, вид знаково-символической деятельности, способ учебного познания и др.

*Психолого-педагогические* основания определяют возможность и целесообразность использования учебного моделирования в обучении *младших школьников*, поскольку оно соответствует возрастным особенностям учащихся начальных классов (наглядно-образное мышление, произвольный характер познавательных процессов, потребность в практических действиях и кинестетических ощущениях) и способствует обобщению и систематизации изучаемого материала, что необходимо для продолжения обучения на II ступени общего среднего образования.

*Психологические* теории о семиотической функции сознания и ее роли в развитии личности ребенка (Л. С. Выготский, Ж. Пиаже), развитии визуального мышления (Р. Арнхейм, М. Вертгеймер), поэтапном формировании умственных действий (П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина), моделировании как компоненте учебной деятельности (В. В. Давыдов, Д. Б. Эльконин) и виде знаково-символической деятельности учащегося (Н. Г. Салмина, Е. Е. Сапогова) обосновывают необходимость акцентирования роли визуальных учебных моделей, использования динамического моделирования, самостоятельной практики учащихся в построении учебных моделей, поэтапного формирования умения моделировать у обучающихся в разработанной методической системе.

*Педагогические* подходы (системный, личностно-ориентированный, деятельностный, компетентностный), положения о сущности и классификации методов обучения (Ю. К. Бабанский, Е. Я. Голант, М. А. Данилов, И. Я. Лернер и др.), использовании моделей и моделирования в обучении (С. П. Баранов, Б. П. Есипов, В. П. Мизинцев, Н. Ю. Русова и др.) позволяют нам учесть в трактовке учебного моделирования два аспекта: моделирование как деятельность учащихся и метод обучения, при этом *деятельность учебного моделирования является приоритетной и определяющей приемами, входящие в состав метода учебного моделирования.*

Выполненный анализ работ о сущности и классификации общеучебных умений учащихся (А. К. Артемов, Ю. К. Бабанский, С. Г. Воровщиков, Н. А. Лошкарева, В. Ф. Паламарчук и др.) позволяет в диссертационном исследовании трактовать *умение* моделировать как комплексное, «синтетическое» общеучебное умение учащихся строить учебные модели реальных и математических объектов, которое *может формироваться на математическом материале*, однако *область его применения шире*, чем конкретная предметная область.

*Методические* основания, включающие результаты анализа особенностей использования учебного моделирования в начальном обучении математике в период с XVII по начало XXI века, обосновывают реализованную в разработанной методической системе бинарную направленность обучения на достижение предметных результатов и формирование у выпускника начальной школы умения самостоятельно строить учебные модели реальных и математических объектов.

Результатом анализа развития приоритетных методических идей в начальном обучении математике стало выделение в диссертационном исследовании *шести этапов генезиса метода учебного моделирования*. Приоритетными методическими идеями, которые доминировали на различных исторических этапах в начальном обучении математике, являлись: 1) подготовка к реализации принципа наглядности в обучении арифметике (первая половина XVII – первая половина XVIII века); 2) наглядное моделирование состава изучаемых чисел (вторая половина XVIII – первая половина XIX века); 3) наглядное моделирование состава изучаемых чисел и текстовых задач, уточняющих представление о числе (середина XIX века); 4) наглядное моделирование арифметических действий и их свойств (вторая половина XIX – начало XX века); 5) наглядное моделирование текстовых задач и способов их решений (первая половина XX века); 6) активизация деятельности учащихся при работе с учебными моделями (вторая половина XX – начало XXI века). Появление новой методической идеи не означало отказа от использования в обучении выработанных ранее приемов, а обогащало методику начального обучения математике на каждом этапе.

Для разработки концепции и методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования большое значение имели результаты, полученные учеными-методистами во второй половине XX – начале XXI века в следующих направлениях: а) обоснование целесообразности и возможности обучения учащихся *математическому моделированию* на доступном для них уровне (А. Я. Блох, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев, Л. Инглиш, А. Г. Мордкович, А. А. Столяр, Дж. Уоттерс и др.); б) введение в школьную практику начального обучения математике понятий «*учебная модель*», «*учебное моделирование*», уточнение и расширение смысла этих понятий, обоснование роли визуальных репрезентаций в процессе понимания математических идей (А. В. Белошистая, В. А. Далингер, В. Л. Дрозд, Н. Б. Истомина-Кастровская, Э. МакЛеллан, В. Н. Медведская, З. Семадени, А. Н. Сендер и др.); в) исследование целесообразности использования в начальном обучении математике *информационно-коммуникационных технологий*, позволяющих реализовать метод учебного

моделирования на высоком технологическом уровне (Л. Л. Босова, А. В. Осин, С. Пейперт, Н. С. Кудаква, Ю. А. Первин, О. Г. Сорока и др.). Результаты анализа указанных исследований позволили обеспечить соответствие этапов процесса формирования умения моделировать в созданной методической системе этапам осуществления математического моделирования, разработать классификацию учебных моделей, спроектировать комплекс интерактивных компьютерных учебных моделей.

Анализ *содержания учебных программ по математике* для I ступени общего среднего образования советского периода и периода разработки национальных учебных программ позволяет сделать вывод о том, что в учебных программах советского периода (1953, 1963, 1969, 1986 годы) и национальных учебных программах Республики Беларусь (1992, 1995, 2004 и 2008 годы) рекомендовались приемы обучения, которые входят в состав метода учебного моделирования: использование геометрических фигур для иллюстрирования текстовых задач и свойств арифметических действий, составление к текстовой задаче кратких записей, рисунков и чертежей, составление текстов задач, запись решения задачи формулой с переменной и выражением и т. п. Однако эти приемы рассматривались как *средства решения задач*, а не в контексте *формирования умения моделировать*, и не были отражены в учебных программах в перечне планируемых результатов обучения.

Выполненный теоретический анализ позволил уточнить ключевые понятия исследования «*учебная модель*» и «*учебное моделирование*». Под *учебной моделью* в начальном обучении математике нами понимается модель, фиксирующая существенные стороны изучаемых математических понятий и способов действий визуальными, вербальными или символическими средствами и используемая в учебном познании в соответствии с целями обучения. Особенности предлагаемой трактовки заключаются в следующем: учебная модель определяется как вид модели в ее гносеологическом значении; учебная модель может быть построена с помощью различных знаково-символических средств с приоритетной ролью визуальных; учебная модель предназначена как для получения новой информации об объекте, так и для достижения других целей обучения, имеющих весомое значение в начальном обучении математике (понимание, усвоение, применение учащимися математических понятий и способов действий).

*Учебное моделирование* в начальном обучении математике представляет собой моделирование, которое используется в учебном познании дуально: как *вид учебно-познавательной деятельности* учащихся начальных классов, предполагающий использование учебных моделей для усвоения

математического материала, а также *метод начального обучения математике*, представляющий собой совокупность приемов работы педагога, направленных как на усвоение учащимися математического материала с помощью учебных моделей, так и на формирование умения моделировать. Особенности предлагаемой трактовки заключаются в следующем: учебное моделирование определяется как вид моделирования в его гносеологическом значении, учитывается двусторонний характер учебного моделирования как вида учебно-познавательной деятельности и метода обучения в их взаимосвязи; деятельностный аспект учебного моделирования признается приоритетным и определяющим приемами, входящие в состав метода учебного моделирования.

**Во второй главе** «Концепция и методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования» представлены две группы выявленных *закономерностей* начального обучения математике с использованием учебного моделирования, соответствующих им *принципов* и *теоретических положений* концепции, дана характеристика компонентов разработанной *методической системы*.

К *первой* группе относятся *закономерности*, отражающие влияние внешних и внутренних факторов на *усвоение учебного материала* по математике с использованием учебного моделирования (зависимость эффективности усвоения учащимися учебного материала по математике от понимания учителем теоретических оснований метода учебного моделирования; систематичности использования учебных моделей, построенных с помощью различных средств репрезентации; применения визуальных учебных моделей на этапе ознакомления с математическими понятиями и способами действий; оптимизации практики использования визуальных учебных моделей на этапе закрепления учебного материала и исключением ситуаций их неоправданно широкого применения; использования в сочетании учебных моделей, отражающих сущность изучаемого понятия и способы рассуждений).

Во *вторую* группу включены *закономерности*, отражающие влияние внешних и внутренних факторов на *формирование у обучающихся умения моделировать* реальные и математические объекты (зависимость эффективности овладения умением моделировать от степени самостоятельности учащихся в процессе работы с учебной моделью; предоставления учащимся возможностей манипулирования учебными моделями; использования заданий, направленных на поэтапное формирование умения моделировать; понимания и учета педагогом функциональных различий учебных моделей на отдельных этапах формирования умения моделировать;

регулярного мониторинга динамики развития умения моделировать у обучающихся).

Соответственно выявленным закономерностям выделяются две группы *принципов*. К *первой* группе относятся принципы теоретической осмысленности, репрезентационной вариативности, приоритета визуальных учебных моделей на начальном этапе обучения, полимодельного перевода на этапе закрепления учебного математического материала, дополнения содержательных учебных моделей процессуальными учебными моделями. Во *вторую* группу входят принципы активного моделирования, сочетания статического и динамического моделирования, поэтапного формирования умения моделировать, функциональной дифференциации учебных моделей на различных этапах формирования умения моделировать, единства диагностической и эвристической функций учебных моделей в процессе диагностики умения моделировать.

С учетом выявленных закономерностей и соответствующих им принципов в главе сформулированы *теоретические положения* концепции начального обучения математике с использованием учебного моделирования. В *первом* положении указывается на необходимость осмысления учителем теоретических (гносеологических, психолого-педагогических и методических) оснований метода учебного моделирования. *Второе* положение обосновывает необходимость использования различных средств репрезентации (визуальных, вербальных, символических) для построения учебных моделей, что позволяет выделить инвариант и обеспечить доступность восприятия учебного материала с учетом индивидуальных особенностей учащихся. В *третьем* положении подчеркивается приоритетная роль визуальных учебных моделей на этапе ознакомления с новым учебным материалом, что детерминировано следующими факторами: недостаточной сформированностью вербального и символического «языков» математики у младших школьников; наглядно-образным типом их мышления; близостью визуальной модели к реальной ситуации, которую она отражает; особой ролью визуальных компонентов в продуктивном мышлении, которые для своего развития требуют активной стимуляции с первых лет обучения. *Четвертое* положение требует соблюдения баланса в использовании моделей разных видов (визуальных, вербальных, символических) на этапе обобщения, закрепления и систематизации знаний и акцентирует внимание на том, что чрезмерное применение визуализации может препятствовать формированию обобщенных математических представлений. Согласно *пятому* положению в системе учебных моделей должны быть представлены как содержательные модели, фиксирующие существенные характеристики изучаемого понятия, так и процессуальные модели,

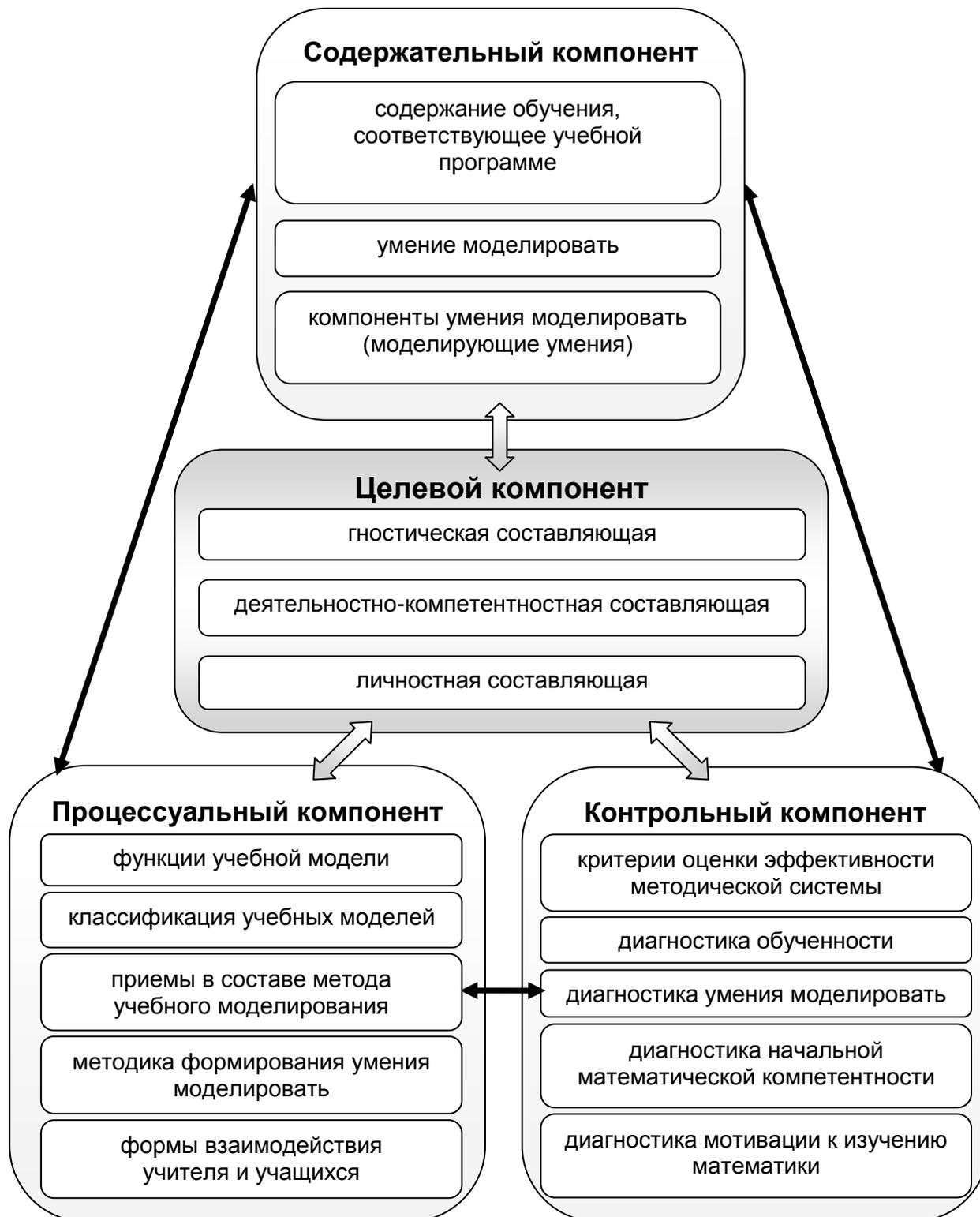
отражающие ход рассуждения или этапы усваиваемого способа действий. В *шестом* положении указывается, что учащиеся должны не только наблюдать за тем, как строится или используется учебная модель, но регулярно осуществлять самостоятельное построение и преобразование учебных моделей. *Седьмое* положение требует дополнения статических учебных моделей динамическими, которые обеспечивают наглядно-практическую опору для формирования умения моделировать и позволяют показать учащимся начальных классов важнейшие математические понятия и способы действий в динамике. В *восьмом* положении обосновывается необходимость применения методики формирования умения моделировать, основанной на последовательном овладении учащимися моделирующими умениями, входящими в состав умения моделировать. *Девятое* положение требует учета функциональных различий учебных моделей на отдельных этапах формирования умения моделировать: конкретизирующая и обобщающая функции являются приоритетными на первом этапе, а объяснительная и эвристическая – на последующих этапах формирования этого умения. В *десятом* положении подчеркивается необходимость мониторинга уровня сформированности умения моделировать у обучающихся при условии использования учебной модели в диагностической и эвристической функциях.

Теоретические положения концепции стали фундаментом разработанной *методической системы*, структура которой показана на рисунке 1.

*Цель* начального обучения математике с использованием учебного моделирования имеет *гностическую, деятельностно-компетентностную и личностную* составляющие: 1) обеспечение достижения предметных результатов обучения, определенных учебной программой учебного предмета «Математика»; 2) формирование умения моделировать реальные и математические объекты и приобретение начального опыта выполнения компетентностно-ориентированных заданий, 3) развитие мотивации учащихся к изучению математики.

*Содержание* разработанной методической системы базируется на учебной программе учебного предмета «Математика». Перечень умений, входящих в содержание начального обучения математике, обогащается *умением моделировать* – строить учебные модели реальных и математических объектов с использованием визуальных, вербальных и символических средств. Умение моделировать является комплексным умением, в состав которого входят *моделирующие умения*, соответствующие этапам математического моделирования: выделить в исходном объекте существенные стороны, подлежащие представлению в учебной модели; определить средства репрезентации существенных сторон в исходном объекте; выбрать средства

репрезентации для построения учебной модели; представить выделенные стороны с помощью выбранных средств репрезентации; преобразовать построенную учебную модель; соотнести построенную учебную модель с исходным объектом и с другими объектами такого же типа.



**Рисунок 1. – Структура методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования**

В *процессуальном* компоненте методической системы дана характеристика функций учебной модели (обобщающая, конкретизирующая, демонстрационная, мнемоническая, объяснительная, эвристическая, диагностическая). Перечень функций учебной модели дополнен нами *диагностической* функцией: умение построить учебную модель к уже решенной задаче позволяет учителю проверить глубину понимания учащимся способа ее решения.

Разработанная в исследовании *классификация* учебных моделей (таблица 1) отражает логику применения учебного моделирования в обучении. Вначале педагогом уточняется сущность моделируемого объекта, поэтому первое основание классификации – вид моделируемого объекта. На этом основании учебные модели делятся на *содержательные* и *процессуальные*. Примером содержательной учебной модели является схематический чертеж к текстовой задаче, а процессуальной учебной модели – граф-схема поиска решения текстовой задачи. Далее определяются средства построения учебной модели, соответственно второе основание классификации – средства репрезентации. По этому основанию выделяются *визуальные*, *вербальные*, *символические* и *комбинированные* учебные модели. Примерами визуальной учебной модели являются модели чисел, выполненные с помощью абака, вербальной учебной модели – определения изучаемых математических понятий и алгоритмы рассуждений, символической учебной модели – математические записи (выражения, равенства, неравенства), комбинированных учебных моделей – таблицы и интеллект-карты. Затем педагог выбирает способ работы с учебной моделью, по этому основанию учебные модели можно разделить на *статические* и *динамические*. Примерами статической учебной модели являются учебные модели, изображенные в учебных пособиях или показанные учителем, а динамической – модели, выполняемые на наборном полотне или на парте с помощью геометрических фигур, а также интерактивные модели электронного средства обучения. В результате использования разработанной классификации каждую учебную модель можно охарактеризовать комплексно с учетом трех указанных оснований.

В исследовании была разработана *методика формирования умения моделировать* в процессе начального обучения математике, этапы которой соответствуют этапам математического моделирования: вначале учащиеся обучаются умению осуществлять выбор средств репрезентации для создания учебной модели и строить учебную модель, затем учатся работать с построенной учебной моделью, а в заключение – интерпретировать

Таблица 1. – Классификация учебных моделей в методической системе начального обучения математике с использованием учебного моделирования

Учебные модели						
1. По виду моделируемого объекта						
Содержательные			Процессуальные			
Учебные модели, которые фиксируют существенные характеристики содержания задачи: количественные данные и структуру отношений между ними			Учебные модели, которые отражают ход рассуждения при выполнении учебного задания			
2. По средствам репрезентации						
Визуальные		Вербальные	Символические			Комбинированные
Предметные	Схематические		Выражения	Равенства	Неравенства	
Учебные модели, средствами построения которых являются реальные объекты или их изображения	Учебные модели, средствами построения которых являются геометрические фигуры – абстрактные заместители реальных объектов	Учебные модели, построенные на естественном языке	Учебные модели, построенные с помощью математической символики (исключая знаки «=», «<», «>»)	Учебные модели, построенные с помощью математической символики (включая знак «=», исключая знаки «<», «>»)	Учебные модели, построенные с помощью математической символики (исключая знак «=», включая знаки «<», «>»)	Учебные модели, в которых используются в сочетании различные средства репрезентации
3. По способу работы с учебной моделью						
Статические			Динамические			
Учебные модели, с которыми учащимся невозможно или затруднительно выполнять практические действия			Учебные модели, с которыми учащиеся могут выполнять практические действия			

построенную учебную модель, соотносить ее с другими ситуациями, которые могут быть описаны этой моделью. На каждом из четырех этапов обучения формируются отдельные моделирующие умения с помощью комплекса заданий на *соотнесение*, *выбор*, *дополнение*, *построение* и *преобразование* учебной модели (таблица 2).

В заданиях на *соотнесение модели* учащиеся сравнивают предложенные им учебные модели, построенные с помощью различных средств репрезентации, с реальным объектом или между собой. При выполнении заданий учащиеся должны выявить инвариант, который сохраняется в каждой модели, определить, соответствуют ли друг другу предложенные для сравнения модели по существенным признакам. В заданиях на *выбор модели* учащимся нужно выбрать учебную модель, которая соответствует реальному объекту или другой учебной модели по существенным характеристикам. С целью формирования репрезентационной гибкости в отдельных случаях предлагаются задания, где можно сделать не один, а несколько выборов соответствующей учебной модели. В заданиях на *дополнение модели* учащимся нужно дополнить учебную модель недостающими элементами. Подобные задания готовят учащихся к самостоятельному построению учебной модели. Поэтому количество дополнений, которые требуется выполнить, может быть различным: в одних заданиях учащимся нужно только обозначить искомое вопросительным знаком, а в других – внести необходимые числовые данные и обозначить искомое. В заданиях по самостоятельному *построению модели* учащимся нужно построить учебную модель, соответствующую реальному объекту или другой учебной модели, используя аналогичные или иные средства репрезентации. Задания на *преобразование модели* предполагают внесение учащимися изменений в построенную учебную модель с целью поиска решения задачи.

Несмотря на то, что на каждом этапе основными являются определенные виды заданий, указанные в таблице 2, не исключается применение в обучении других видов заданий с пропедевтической целью и с учетом индивидуальных различий учащихся. В практике обучения математике важно на всех этапах обучения показывать учащимся цикл моделирования в полном объеме, то есть даже на первых этапах целесообразно упражняться в построении, преобразовании и интерпретации учебных моделей.

В исследовании представлены выделенные нами основные *приемы*, входящие в состав метода учебного моделирования и соответствующие моделирующим умениям учащихся.

Таблица 2. – Этапы формирования умения моделировать у обучающихся

Усвоение предметного содержания	Формирование моделирующих умений	Основные виды заданий
<b>Первый этап</b>		
Использование учебных моделей для обобщения первичного эмпирического материала и формирования начальных представлений о математических понятиях числа, арифметического действия, отношения, геометрической фигуры	Выполнять анализ, синтез, сравнение и классификацию объектов. Выделять в исходном объекте существенные стороны, подлежащие моделированию. Определять вид средств репрезентации, использованных в исходном объекте и его модели	Соотнесение и выбор учебных моделей
<b>Второй этап</b>		
Использование учебных моделей для достижения понимания сущности изучаемого математического материала	Выбирать средства репрезентации для дополнения учебной модели. Представлять выделенные в исходном объекте существенные стороны с помощью выбранных средств репрезентации для дополнения учебной модели	Дополнение учебных моделей недостающими элементами
<b>Третий этап</b>		
Использование учебных моделей для поиска способов решения задач	Выбирать средства репрезентации для построения учебной модели. Представлять выделенные в исходном объекте существенные стороны с помощью выбранных средств репрезентации для построения учебной модели	Построение учебных моделей
<b>Четвертый этап</b>		
Использование учебных моделей для поиска различных способов решения задачи и приобретение начального опыта в интерпретации построенной модели	Преобразовывать построенную учебную модель в соответствии с учебным заданием. Соотносить построенную учебную модель с исходным объектом и другими объектами того же типа	Преобразование учебной модели; построение аналогичной учебной модели

В ходе исследования были выделены и описаны шесть основных *форм взаимодействия учителя и учащихся* при использовании учебного моделирования на уроках математики, которые отличаются вариантами сочетания наглядно-практических и словесных приемов обучения (таблица 3).

Таблица 3. – Формы взаимодействия учителя и учащихся при использовании учебного моделирования

Словесные приемы	Наглядно-практические приемы		
	Фронтальная демонстрация учебной модели учителем («Смотри»)	Фронтальная демонстрация учебной модели и индивидуальная практика учащихся по ее построению («Смотри и делай»)	Индивидуальная практика учащихся по построению учебной модели («Делай»)
Рассказ учителя («Слушай»)	Форма 1 Фронтальная демонстрация способа работы с учебными моделями в сочетании с рассказом учителя	Форма 3 Фронтальная демонстрация способа работы с учебными моделями вместе с аналогичной практической работой учащихся в сочетании с рассказом учителя	Форма 5 Самостоятельная практическая работа учащихся с учебными моделями в сочетании с рассказом учителя
Беседа учителя с учащимися «Слушай и говори»	Форма 2 Фронтальная демонстрация способа работы с учебными моделями в сочетании с беседой учителя и учащихся	Форма 4 Фронтальная демонстрация способа работы с учебными моделями вместе с аналогичной практической работой учащихся в сочетании с беседой учителя и учащихся	Форма 6 Самостоятельная практическая работа учащихся с учебными моделями в сочетании с беседой учителя и учащихся

Выделение методических форм было результатом теоретического осмысления полученного практического материала – планов-конспектов и

протоколов наблюдений за уроками математики, проведенных учителями начальных классов г. Гомеля, г. Заславля, г. Минска, п. Боровляны, п. Самохваловичи, бесед с учителями, обучающимися на заочном отделении факультета начального образования БГПУ, а также с учителями, повышающими квалификацию в Институте повышения квалификации и переподготовки кадров БГПУ, в Академии последипломного образования, в Минском городском институте развития образования.

В главе представлены разработанные *критерии оценки эффективности* методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования: *обученность* учащихся (определяется с помощью контрольных работ, составленных в соответствии с требованиями к результатам учебной деятельности учащихся); *сформированность* у обучающихся *умения моделировать* (устанавливается с помощью авторской методики диагностики этого умения); *начальная математическая компетентность* (выявляется через выполнение авторских компетентностно-ориентированных заданий, требующих применения предметных и общеучебных умений – в том числе и умения моделировать – для решения проблемы, близкой к реальной действительности); *мотивация* учащихся к изучению учебного предмета «Математика» (определяется по результатам анкетирования учащихся 3 и 4 классов).

В исследовании разработана *методика диагностики умения моделировать*. В ходе диагностики проверяется умение учащегося строить учебные модели для уже решенной им задачи (где учебные модели реализуют диагностическую функцию – функцию проверки глубины понимания усвоенного учебного материала) и умение моделировать при поиске решения задачи (где учебные модели используются в эвристической функции).

**В третьей главе** «Реализация методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования» представлены результаты внедрения разработанной методической системы в образовательный процесс начальной школы.

Результаты выполненного исследования были использованы в процессе проектирования *концепции* учебного предмета «Математика», *образовательного стандарта* начального образования и *учебной программы* учебного предмета «Математика», разработанных в 2015–2017 годах в рамках отраслевой научно-технической программы «Качество образования».

Методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования была реализована в *учебно-методическом комплексе по математике* для I ступени общего среднего образования. В учебно-методический комплекс входят: учебные пособия

«Математика» для учащихся 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским и белорусским языками обучения, «Рабочая тетрадь» для учащихся 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским и белорусским языками обучения, «Тетрадь для проверочных работ», «Самостоятельные и контрольные работы» для учащихся 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским и белорусским языками обучения, «Математика. Тетрадь для стимулирующих занятий» для учащихся 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским языком обучения, электронное средство обучения «Математика. 2–4 классы» для учащихся, учебно-методические пособия «Математика в 1 классе», «Математика во 2 классе», «Математика в 3 классе», «Математика в 4 классе» для учителей 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским и белорусским языками обучения. Учебные пособия, входящие в состав учебно-методического комплекса, имеют грифы Министерства образования Республики Беларусь и Национального института образования Министерства образования Республики Беларусь.

С 2012–2013 учебного года по 2014–2015 учебный год Национальным институтом образования Министерства образования Республики Беларусь была проведена *опытная проверка* учебных пособий по математике для I ступени общего среднего образования. По результатам опытной проверки отдел методического обеспечения начального образования Национального института образования пришел к положительному заключению о том, что использование учебных пособий по математике позволяет реализовать комплекс задач образовательного, воспитательного и развивающего характера.

*Педагогический эксперимент* по оценке эффективности разработанного учебно-методического комплекса осуществлялся с 1999 по 2017 годы. Всего в экспериментальном обучении участвовало 1129 учащихся начальных классов.

На *первом (поисковом)* этапе эксперимента (1999–2010 годы) были решены следующие задачи: обоснована актуальность проблемы исследования, проведен теоретический анализ проблемы использования учебного моделирования в процессе обучения математике, разработаны проекты концепции и методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования, выделены формы взаимодействия учителя и учащихся при использовании учебного моделирования и исследована эффективность их применения на уроках математики, определены критерии оценки эффективности методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования, разработан учебно-методический комплекс по математике для I ступени общего среднего образования. Поисковый этап эксперимента осуществлялся на базе гимназии

№ 30 г. Минска, гимназии № 51 г. Гомеля, Заславской гимназии, общеобразовательной школы п. Самохваловичи. В экспериментальной работе на поисковом этапе принимало участие 699 учащихся. Из них к работе по апробации материалов учебно-методического комплекса были привлечены 375 учащихся (198 учащихся экспериментальных классов и 177 учащихся контрольных классов); к оценке эффективности выделенных форм взаимодействия учителя и учащихся при использовании учебного моделирования – 324 учащихся экспериментальных классов.

На *втором (формирующем)* этапе (2010–2015 годы) велось экспериментальное обучение с использованием учебных пособий, входящих в состав учебно-методического комплекса по математике. В эксперименте принимали участие гимназия № 10 г. Минска, Заславская гимназия, учебно-педагогический комплекс детский сад - средняя школа д. Боровляны. В экспериментальном обучении на формирующем этапе принимало участие 430 учащихся (226 учащихся – в экспериментальных классах, 204 учащихся – в контрольных классах).

В ходе экспериментальной работы регулярно проводились методические семинары для учителей, на которых обсуждались особенности методики начального обучения математике с использованием учебных пособий, входящих в состав разработанного учебно-методического комплекса, проводились и анализировались уроки математики. Для внедрения в образовательный процесс инновационного компонента учебно-методического комплекса – электронного средства обучения «Математика. 2–4 классы» – в 2011–2013 годах был реализован инновационный проект «Внедрение комплекса интерактивных компьютерных моделей в процесс начального математического образования».

На *третьем (контрольном)* этапе (2015–2017 годы) для оценки эффективности использования разработанного учебно-методического комплекса применялись сформулированные на поисковом этапе эксперимента критерии: обученности, сформированности умения моделировать, начальной математической компетентности, мотивации учащихся к изучению учебного предмета «Математика». Для проверки достоверности полученных экспериментальных результатов применялся статистический критерий «хи-квадрат».

Диагностика по критерию «*обученность*» (первый критерий) проводилась по двум направлениям: «*умение решать текстовые задачи*» и «*вычислительные умения*». Для подтверждения однородности экспериментальной и контрольной выборок по уровню обученности до начала экспериментального обучения учащимся первого класса во второй четверти

было предложено выполнить диагностическую контрольную работу в двух частях (одна часть – по направлению «текстовые задачи», вторая часть – по направлению «вычисления»). В соответствии с полученными результатами учащиеся были распределены на группы со следующими уровнями обученности: первый (неудовлетворительный) – учащиеся, получившие отметки 1-2; второй (низкий) – учащиеся, получившие отметки 3-4; третий (средний) – учащиеся, получившие отметки 5–7; четвертый (высокий) – учащиеся, получившие отметки 8–10 (таблицы 4, 5).

Для сравниваемых выборок до экспериментального обучения по направлению «текстовые задачи» эмпирическое значение  $\chi^2_{эмп}$  оказалось равным 2,4, а по направлению «вычисления» – 1,8. Так как в обоих случаях  $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{кр}$  ( $\chi^2_{кр} = 7,82$  для трех степеней свободы и уровня значимости  $\alpha = 0,05$ ), выявленные различия статистически не значимы.

В процессе экспериментальной работы в конце каждого учебного года осуществлялся мониторинг результатов обучения по направлениям «умение решать текстовые задачи» и «вычислительные умения». Результаты выполнения четвероклассниками итоговой диагностической контрольной работы показали, что доля учащихся с неудовлетворительным и низким уровнями сформированности предметных умений в экспериментальной группе по сравнению с контрольной значительно сократилась, а со средним и высоким уровнями – увеличилась (таблицы 4, 5). По направлению «текстовые задачи» эмпирическое значение  $\chi^2_{эмп}$  равно 11,97, по направлению «вычисления» – 14,95. Так как  $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр}$  ( $\chi^2_{кр} = 7,82$ ), выявленные различия статистически значимы.

Таблица 4. – Результаты выполнения диагностической контрольной работы до и после экспериментального обучения (текстовые задачи)

Выборка	Уровни обученности				Количество учащихся
	1	2	3	4	
Экспериментальная (до обучения)	18	86	99	23	226
	8 %	38 %	44 %	10 %	100 %
Экспериментальная (после обучения)	14	45	133	34	226
	6 %	20 %	59 %	15 %	100 %
Контрольная (до обучения)	20	72	98	14	204
	10 %	35 %	48 %	7 %	100 %
Контрольная (после обучения)	16	65	107	16	204
	8 %	32 %	52 %	8 %	100 %

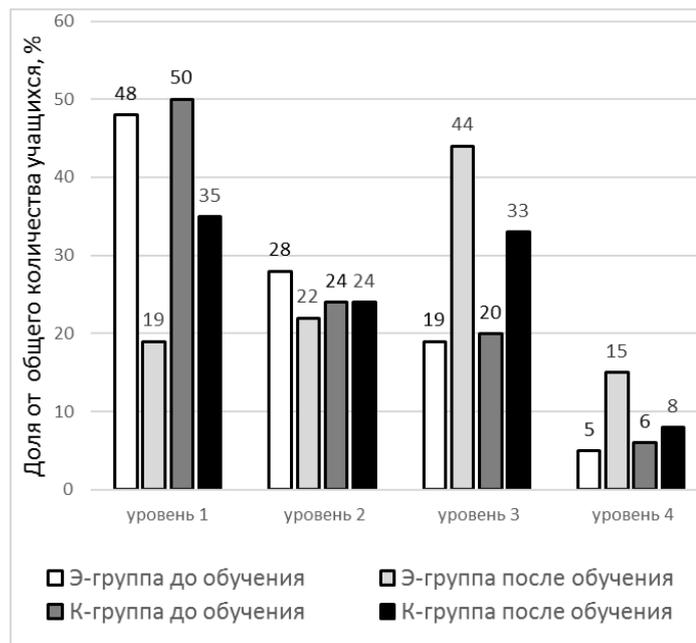
Таблица 5. – Результаты выполнения диагностической контрольной работы до и после экспериментального обучения (вычисления)

Выборка	Уровни обученности				Количество учащихся
	1	2	3	4	
Экспериментальная (до обучения)	23	72	111	20	226
	10 %	32 %	49 %	9 %	100 %
Экспериментальная (после обучения)	9	43	138	36	226
	4 %	19 %	61 %	16 %	100 %
Контрольная (до обучения)	25	73	92	14	204
	12 %	36 %	45 %	7 %	100 %
Контрольная (после обучения)	19	61	104	20	204
	9 %	30 %	51 %	10 %	100 %

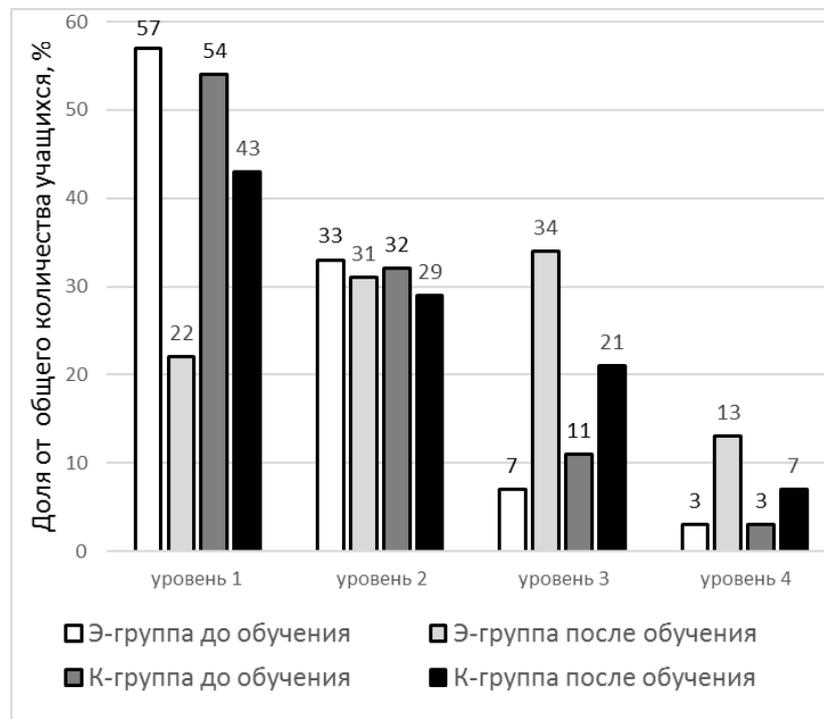
Для проверки результатов экспериментальной работы по критерию «сформированность умения моделировать» (второй критерий) учащимся предлагалось выполнить задания на построение учебных моделей в двух ситуациях: когда они знали способ решения задачи и когда они не знали способ решения задачи. В первом случае проверялись глубина понимания уже известного учащимся способа решения задачи и владение средствами учебного моделирования (диагностическая функция учебной модели), во втором – умение использовать учебное моделирование для поиска решения задачи (эвристическая функция учебных моделей). Сравнить результаты, полученные до и после экспериментального обучения, можно с помощью диаграмм, представленных на рисунках 2 и 3.

Для сравниваемых выборок до экспериментального обучения в случае использования учебных моделей в диагностической функции эмпирическое значение  $\chi^2_{эмп}$  оказалось равным 0,95, а в эвристической функции – 1,84. Поскольку  $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{кр}$  (7,82), выявленные различия статистически не значимы. После экспериментального обучения для сравниваемых выборок в случае применения учебных моделей в диагностической функции эмпирическое значение  $\chi^2_{эмп}$  оказалось равным 18,45, а в эвристической функции – 25,2. Так как  $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр}$ , выявленные различия являются статистически значимыми.

Для оценки результатов экспериментальной работы по критерию «начальная математическая компетентность» (третий критерий) были использованы авторские компетентностно-ориентированные задания, предложенные выпускникам начальной школы. В процедуре оценки использовались три задания, выполнение которых требовало применения предметных и общеучебных умений – в том числе и умения моделировать – для решения проблемы, близкой к реальной действительности.



**Рисунок 2. – Результаты диагностики умения моделировать при использовании учебных моделей в диагностической функции**



**Рисунок 3. – Результаты диагностики умения моделировать при использовании учебных моделей в эвристической функции**

Задания отличались по уровню сложности, поэтому выполнение первого задания оценивалось в 1 балл, второго – 2 балла, третьего – 3 балла (всего 6 баллов). По результатам выполнения заданий учащиеся распределялись на группы, соответствующие следующим уровням: первый – неудовлетворительный: учащийся набрал 0 баллов; второй – низкий: учащийся набрал 1-2 балла; третий – средний: учащийся набрал 3-4 балла; четвертый – высокий: учащийся набрал 5-6 баллов. Результаты выполнения заданий свидетельствуют о том, что у обучающихся в экспериментальных классах начальная математическая компетентность оказалась сформированной на более высоком уровне, чем в контрольных классах. Первый (неудовлетворительный) уровень был продемонстрирован в экспериментальных классах у 6 % учащихся, в контрольных – у 12 %. Второй (низкий) уровень – у 24 % учащихся экспериментальных классов и 32 % учащихся контрольных классов. Третий (средний) уровень был выявлен у 55 % учащихся экспериментальных классов и у 48 % учащихся контрольных классов. Четвертый (высокий) уровень показали 15 % учащихся экспериментальных классов и 8 % учащихся контрольных классов. Для сравниваемых выборок эмпирическое значение  $\chi^2_{эмп}$  равно 13,47. Поскольку  $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр}$  (7,82), различия в результатах выполнения заданий статистически значимы.

Оценка эффективности экспериментальной работы по критерию «мотивация учащихся к изучению математики» (четвертый критерий) выполнялась в третьем и четвертом классах. Для этого использовалась анкета, разработанная Национальным институтом образования Министерства образования Республики Беларусь для опытной проверки учебных пособий по математике. По результатам анкетирования учащиеся были разделены на две группы (учащиеся, проявившие заинтересованное отношение, и учащиеся, не проявившие заинтересованное отношение к изучению математики). В начале третьего года обучения заинтересованное отношение к математике было выявлено у 71 % учащихся экспериментальных классов и у 65 % учащихся контрольных классов. Применение критерия  $\chi^2$  позволило установить, что  $\chi^2_{эмп}$  равно 1,55. При сравнении полученного значения с критическим значением критерия  $\chi^2$  для одной степени свободы и уровня значимости  $\alpha = 0,05$  (3,84) получаем, что  $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{кр}$ , следовательно, различия в результатах первого анкетирования учащихся экспериментальной и контрольной выборок были статистически не значимы.

В конце четвертого года обучения заинтересованное отношение к математике было выявлено у 81 % учащихся экспериментальных классов и у 64 % учащихся контрольных классов. Эмпирическое значение  $\chi^2_{эмп}$  оказалось равным 15,29. Критическое значение критерия  $\chi^2$  для одной степени свободы и

уровня значимости  $\alpha = 0,05$  равно 3,84. Поскольку  $\chi^2_{\text{эмп}} > \chi^2_{\text{кр}}$ , выявленные различия в результатах статистически значимы. Можно сделать вывод о том, что учащиеся экспериментальной группы в конце обучения были в большей степени заинтересованы в изучении математики, чем учащиеся контрольной группы.

Результаты экспериментальной работы подтвердили эффективность методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования. Разработанный учебно-методический комплекс по учебному предмету «Математика» используется в образовательном процессе начальной школы Республики Беларусь с 2011 года. С 2015 года осуществляется второе издание учебных пособий, входящих в состав учебно-методического комплекса. По учебному пособию «Математика» для первого класса (на белорусском и русском языках обучения) в 2011 году обучалось 49 200 учащихся, после переиздания в 2015 году – 64 600 учащихся; для второго класса в 2012 году – 54 100 учащихся, после переиздания в 2016 году – 67 290 учащихся; для третьего класса в 2013 году – 56 800 учащихся, после переиздания в 2017 году – 67 470 учащихся; для четвертого класса в 2014 году – 56 600 учащихся, после переиздания в 2018 году – 65 760 учащихся.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

1. В результате проведенного исследования определены *теоретические основания* начального обучения математике с использованием учебного моделирования: *гносеологические, психолого-педагогические, методические*. Выявленные теоретические основания стали фундаментом для разработки концепции и методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования.

*Гносеологические* основания позволили рассматривать учебное моделирование в качестве дидактической проекции метода научного моделирования и универсальный метод учебного познания, а учебные модели – как модели, используемые в обучении с целью усвоения учебного математического материала. С учетом результата анализа философских работ учебная модель была определена нами как вид модели, а учебное моделирование – как вид моделирования в их гносеологическом значении.

*Психолого-педагогические* основания определили возможность и целесообразность использования учебного моделирования в обучении младших

школьников, поскольку этот метод обучения учитывает возрастные особенности учащихся начальных классов (наглядно-образное мышление, произвольный характер познавательных процессов, необходимость манипулятивной деятельности и кинестетических ощущений), а также способствует обобщению и систематизации изучаемого материала на доступном для учащихся уровне. Результаты анализа психолого-педагогических исследований были учтены при разработке методической системы начального обучения математике в аспекте акцентирования роли визуальных учебных моделей и применения динамического моделирования на этапе ознакомления с новым учебным материалом, создания возможностей для самостоятельной работы учащихся с учебными моделями, поэтапного формирования умения моделировать у обучающихся. С учетом полученных результатов в определении учебного моделирования были учтены два аспекта – моделирование как деятельность учащихся и метод обучения, при этом деятельность учебного моделирования была признана приоритетной и определяющей приемами, входящие в состав метода учебного моделирования.

Выполненный анализ работ о сущности и классификации общеучебных умений учащихся позволил трактовать умение моделировать как умение учащихся строить учебные модели реальных и математических объектов, которое может формироваться на математическом материале, однако имеет более широкую область применения.

*Методические основания* позволили в разработанной методической системе обеспечить бинарную направленность как на достижение предметных результатов обучения математике с использованием средств учебного моделирования, так и на формирование у выпускника начальной школы умения самостоятельно строить учебные модели реальных и математических объектов. Анализ работ ученых-методистов в области начального обучения математике позволил выявить приоритетные методические идеи и связанные с ними особенности реализации принципа наглядности обучения в период с XVII по начало XXI века. Результаты анализа развития приоритетных методических идей в начальном обучении математике стали основой для установления шести этапов генезиса метода учебного моделирования.

В выполненном исследовании были учтены результаты, полученные учеными-методистами во второй половине XX – начале XXI века в аспекте приобщения учащихся к математическому моделированию, уточнения сущности понятий «учебная модель» и «учебное моделирование», использования в начальном обучении математике информационно-коммуникационных технологий, повышения степени активности учащихся в работе с учебными моделями. Результаты анализа этих исследований

позволили в созданной методической системе обеспечить соответствие этапов формирования умения моделировать этапам математического моделирования, разработать классификацию учебных моделей, спроектировать комплекс интерактивных компьютерных учебных моделей.

В результате выполненного теоретического анализа были уточнены ключевые понятия исследования «*учебная модель*» и «*учебное моделирование*» с точки зрения предметной области и ступени образования. К *учебным моделям* в начальном обучении математике отнесены модели, которые фиксируют существенные характеристики изучаемых математических понятий и способов действий с помощью визуальных, вербальных или символических средств и используются в учебном познании в соответствии со стоящими перед учителем и учащимися целями. *Учебное моделирование* определено как моделирование, используемое в учебном познании дуально: как вид учебно-познавательной деятельности учащихся, предполагающий использование учебных моделей с целью усвоения математического материала, и метод обучения, который представляет собой совокупность приемов работы педагога, направленных как на усвоение учащимися математического материала с помощью учебных моделей, так и на формирование умения моделировать [1, 6, 10, 23, 24, 37, 44, 48, 51, 93].

2. Разработана *концепция* начального обучения математике с использованием учебного моделирования, которая базируется на методической идее соотнесения учебного моделирования в начальном обучении математике с методом математического моделирования, обеспечивает направленность обучения как на достижение предметных результатов, так и на формирование у обучающихся умения моделировать реальные и математические объекты.

В концепции выделены две группы *закономерностей* начального обучения математике с использованием учебного моделирования: закономерности первой группы связаны с достижением предметных результатов обучения, второй группы – с формированием у обучающихся умения моделировать. Выделенным закономерностям соответствуют *две группы принципов*: теоретической осмысленности, репрезентационной вариативности, приоритета визуальных учебных моделей на начальном этапе обучения, полимодельного перевода на этапе закрепления учебного математического материала, дополнения содержательных учебных моделей процессуальными (первая группа); активного моделирования, сочетания статического и динамического моделирования, поэтапного формирования умения моделировать, функциональной дифференциации учебных моделей на различных этапах формирования умения моделировать, единства

диагностической и эвристической функций учебных моделей в процессе диагностики умения моделировать (вторая группа).

Сформулированные принципы были реализованы в *теоретических положениях* концепции, которые обосновали структуру и содержательное наполнение разработанной методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования [11, 22, 25, 43].

3. Создана *методическая система* начального обучения математике с использованием учебного моделирования, включающая *целевой, содержательный, процессуальный* и *контрольный* компоненты.

В *целевом* компоненте представлена цель начального обучения математике с использованием учебного моделирования, которая имеет гностическую, деятельностно-компетентностную и личностную составляющие.

В *содержательном* компоненте перечень знаний и умений учащихся дополнен *умением моделировать*, под которым понимается умение учащихся строить учебные модели реальных и математических объектов с использованием различных средств репрезентации. Уточнен перечень моделирующих умений, соответствующих этапам математического моделирования и являющихся компонентами умения моделировать: выделить в исходном объекте существенные стороны, подлежащие представлению в учебной модели; определить средства репрезентации существенных сторон в исходном объекте; выбрать средства репрезентации для построения учебной модели; представить выделенные в исходном объекте стороны с помощью выбранных средств репрезентации; преобразовать построенную учебную модель; соотнести построенную учебную модель с исходным объектом; соотнести построенную учебную модель с другими объектами такого же типа.

В *процессуальном* компоненте предложен перечень *функций* учебной модели, дополненный нами диагностической функцией (способность учащегося построить учебную модель позволяет учителю выявить глубину понимания усвоенного математического материала); представлена *классификация* учебных моделей, построенная в соответствии с логикой применения педагогом метода учебного моделирования в образовательном процессе; показана разработанная в исследовании *методика формирования* умения моделировать, представляющая собой последовательность этапов, на каждом из которых обеспечивается достижение целей обучения по освоению предметного содержания и овладению компонентами умения моделировать; выделены *приемы*, входящие в состав метода учебного моделирования и соответствующие моделирующим умениям учащихся. На основе вариантов сочетания наглядно-практических и словесных приемов метода учебного моделирования выделены шесть *форм взаимодействия* учителя и учащихся

при использовании учебного моделирования на уроках математики в начальной школе.

В *контрольном* компоненте методической системы были обоснованы *критерии оценки* ее эффективности (обученность учащихся, сформированность у них умения моделировать, начальная математическая компетентность, мотивация учащихся к изучению математики). Разработанная в исследовании *методика диагностики* умения моделировать позволила определить уровень сформированности этого умения при использовании учебных моделей в диагностической функции (где учащийся строит учебные модели к уже решенной задаче) и эвристической функции (где учащийся строит учебные модели с целью поиска решения задачи) [2 – 5, 7 – 9, 12 – 20, 25, 26, 28 – 35, 38, 39, 41, 42, 45 – 47, 50, 54, 56].

4. Методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования реализована в *учебно-методическом комплексе* по учебному предмету «Математика», эффективность применения которого в обучении была доказана в ходе многолетнего педагогического эксперимента и внедрения в широкую образовательную практику на I ступени общего среднего образования Республики Беларусь.

Результаты выполненного исследования были использованы при проектировании концепции учебного предмета «Математика», образовательного стандарта начального образования, учебной программы учебного предмета «Математика», регламентирующих обучение математике на I ступени общего среднего образования и разработанных в 2015–2017 годах в рамках отраслевой научно-технической программы «Качество образования».

С 2012–2013 по 2014–2015 учебный год Национальным институтом образования Министерства образования Республики Беларусь была проведена опытная проверка учебных пособий по математике, по результатам которой было сделано положительное заключение об эффективности их использования в начальном обучении математике.

В учебно-методический комплекс вошли учебные пособия «Математика» для учащихся 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским и белорусским языками обучения; «Рабочая тетрадь» для учащихся 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским и белорусским языками обучения; «Тетрадь для проверочных работ», «Самостоятельные и контрольные работы» для учащихся 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским и белорусским языками обучения; «Математика. Тетрадь для стимулирующих занятий» для учащихся 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским языком обучения; электронное средство обучения «Математика. 2–4 классы» для учащихся; учебно-методические

пособия «Математика в 1 классе», «Математика во 2 классе», «Математика в 3 классе», «Математика в 4 классе» для учителей 1–4 классов учреждений общего среднего образования с русским и белорусским языками обучения. Учебные пособия, входящие в состав учебно-методического комплекса, имеют грифы Министерства образования Республики Беларусь и Национального института образования Министерства образования Республики Беларусь.

Полученные на формирующем этапе *педагогического эксперимента* (2010–2015 годы) результаты *подтвердили эффективность* применения в образовательном процессе учебно-методического комплекса, в котором реализована методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования [11, 13, 21, 25, 27, 36, 49, 52, 59, 65, 68 – 92].

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Результаты выполненного исследования используются в образовательном процессе на I ступени общего среднего образования, на факультетах подготовки учителей начальных классов, в процессе повышения квалификации учителей начальных классов Республики Беларусь. Актуальными для дальнейшего совершенствования практики начального обучения математике являются указанные далее направления научно-методических исследований.

1). Разработка теории компетентностно-ориентированного начального обучения математике с использованием учебного моделирования. В ходе работы по данному направлению важно сформулировать принципы организации компетентностно-ориентированного обучения математике с использованием учебного моделирования на I ступени общего среднего образования, обосновать и разработать комплекс компетентностно-ориентированных заданий, соответствующих жизненному опыту учащихся начальных классов, разработать учебно-методический комплекс по математике для I ступени общего среднего образования на основе учебного моделирования в контексте компетентностного подхода. В рамках работы по данному направлению был подготовлен фрагмент нового учебного пособия по математике для первого класса для участия в конкурсе учебных пособий, организованного Министерством образования Республики Беларусь в 2017 году. Пособие стало победителем конкурса, его издание планируется в 2019 году. В дальнейшем планируется издание пособий для второго, третьего и четвертого классов. Первые результаты исследования, выполненного в этом направлении, получили отражение в научных публикациях [20, 25, 29, 30, 41].

2). Разработка теории инклюзивного начального обучения математике

с использованием учебного моделирования для учащихся с особенностями психофизического развития. В рамках этого направления предполагается применение как традиционных, так и электронных средств обучения, предоставляющих возможности использовать одно учебное задание с различными методическими комментариями к нему в зависимости от особенностей учащихся. Первым шагом, выполненным в данном направлении, является разработанный учебно-методический комплекс по математике для 1–5 классов специальной общеобразовательной школы, в котором используются учебные модели в качестве средств обучения. Методическая идея перспективного электронного учебного пособия «Живая математика» для учащихся с особенностями психофизического развития представлена в ряде авторских публикаций [46, 53, 55, 57, 58, 60 – 64, 66, 67].

3). Разработка методической системы обучения будущих учителей начальных классов методике использования учебного моделирования на уроках математики. Данное направление работы предполагает формулирование принципов методико-математического образования студентов и разработку на их основе содержания обучения на факультетах подготовки учителей начальных классов. В рамках этого направления важно обосновать и разработать комплекс методических умений, которые следует формировать у студентов в процессе их подготовки к преподаванию математики. Результаты исследований, которые закладывают основу для продолжения работы в данном направлении, содержатся в ряде публикаций [10, 12, 21, 39, 51, 54, 56, 92, 93].

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Монография**

1. Урбан, М. А. Учебное моделирование в процессе обучения математике на I ступени общего среднего образования: методологический и исторический аспекты / М. А. Урбан. – Минск : Белорус. гос. пед. ун-т, 2018. – 198 с.

### **Статьи в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь**

2. Гадзаова, С. В. Інтэрпрэтацыя задач на рух сродкамі сімвалічнай нагляднасці / С. В. Гадзаова, М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 1998. – № 5. – С. 20–21.

3. Дрозд, В. Л. От маленьких проблем – к большим открытиям / В. Л. Дрозд, М. А. Урбан // Нач. шк. – 2000. – № 5. – С. 37–39.

4. Урбан, М. А. Вивучення часу і сістэмы вымярэння часу ў пачатковай школе / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2005. – № 7. – С. 38–40.

5. Урбан, М. А. Як пазнаёміць дзяцей, што маюць цяжкасці ў навучанні, з геаметрычнымі паняццямі / М. А. Урбан, Т. Э. Соладава // Пачатк. шк. – 2006. – № 4. – С. 17–18.

6. Урбан, М. А. Семиотический аспект работы учителя с педагогической информацией / М. А. Урбан // Адукацыя і выхаванне. – 2007. – № 11. – С. 48–56.

7. Урбан, М. А. Поиск решения текстовых задач на основе семиотического подхода / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2008. – № 11. – С. 2–5.

8. Урбан, М. А. Изучение массы и системы единиц измерения массы на основе общей для группы основных величин модели / М. А. Урбан // Нач. шк. – 2009. – № 11. – С. 22–28.

9. Урбан, М. А. Работа с моделями на уроках математики / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2010. – № 4. – С. 52–56.

10. Мельников, О. И. Моделирование на уроках математики в начальной школе: возможности младшего школьника и готовность учителя / О. И. Мельников, М. А. Урбан // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2010. – № 4. – С. 36–41.

11. Урбан, М. А. Научность плюс доступность равно модель: формула нового учебника математики для 1 класса / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2010. – № 11. – С. 41–43.

12. Урбан, М. А. Система методической подготовки учителя к использованию метода моделирования в начальном курсе математики: анализ проблем и поиск путей решения / М. А. Урбан // Вісн. Черкас. ун-ту. Сер.: Пед. науки. – 2010. – Вип. 191, ч. 4. – С. 128–133.

13. Урбан, М. А. Задания с учебными моделями в системе работы над простой арифметической задачей / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2011. – № 7. – С. 6–11.

14. Урбан, М. А. Использование схем при работе с простой арифметической задачей / М. А. Урбан, Е. Н. Трич, М. И. Шарапа // Пачатк. шк. – 2011. – № 12. – С. 7–12.

15. Урбан, М. А. Комплекс интерактивных компьютерных моделей в системе начального математического образования: проблемы разработки и внедрения / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2012. – № 8. – С. 60–63.

16. Сергеев, С. И. Компьютерная визуализация в математическом образовании как практическая педагогическая задача / С. И. Сергеев, М. А. Урбан // Problems of Education in the 21st Century. – 2012. – Vol. 49. – P. 95–103.

17. Урбан, М. А. О проблеме подбора цифры частного при обучении письменному делению на двузначное число / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2013. – № 11. – С. 42–47.

18. Урбан, М. А. Измерение времени как социально значимое умение: проблемы математической подготовки учащихся / М. А. Урбан // Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 3–13.

19. Урбан, М. А. Методические формы совместной деятельности учителя и учащихся при использовании учебного моделирования на уроках математики на I ступени общего среднего образования / М. А. Урбан // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2015. – № 4. – С. 31–40.

20. Урбан, М. А. Компетентностно-ориентированные задания в начальном обучении математике / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2017. – № 8. – С. 20–25.

21. Gadzaova, S. Preparation of future primary school teachers to implement ideas of sustainable development in maths classes / S. Gadzaova, H. Murauyova, M. Urban // *Studia Periegetica*. – 2017. – Vol. 1. – P. 75–87.

22. Urban, M. Didactic principles of visualization of mathematical concepts in primary education / M. Urban, H. Murauyova, S. Gadzaova // *Pedagogika*. – 2017. – Vol. 127, № 3. – P. 70–86.

23. Урбан, М. А. Нагляднае мадэляванне у гісторыі развіцця метадыкі пачатковага навучання матэматыцы / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2018. – № 3. – С. 57–61.

24. Урбан, М. А. Нагляднае мадэляванне у гісторыі развіцця метадыкі пачатковага навучання матэматыцы / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2018. – № 4. – С. 40–44.

25. Урбан, М. А. Учебное пособие по математике для начальной школы: от учебного моделирования к компетентностному подходу / М. А. Урбан // Пачатк. шк. – 2018. – № 12. – С. 34–38.

#### **Статьи в других научных изданиях**

26. Урбан, М. А. Дифференцированное обучение младших школьников путем использования учебных моделей / Пачатк. навучанне. – 2005. – № 6. – С. 40–42.

27. Муравьева, Г. Л. Новое учебное пособие «Математика» для учащихся 1 класса: сохраняя традиции, мы строим будущее / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан // Пачатк. навучанне, № 11. – 2010. – С.9–11.

28. Урбан, М. А. Компьютерная визуализация как средство поиска решения задач в начальной школе / М. А. Урбан // *Edukacja ku przyszłości* /

Uniw. Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach ; red.: A. Klim-Klimaszewska, E. Jagiello. – Siedlce, 2014. – T. 1 : Wyzwania i zaniechania w wychowaniu przedszkolnym i kształceniu wczesnoszkolnym. – S. 249–258.

29. Муравьева, Г.Л. Дидактические материалы по математике для IV класса / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова // Пачатк. шк. – 2017. – № 8. – С. 26–34.

30. Урбан, М. А. Реализация компетентностного подхода в учебном пособии по математике для I ступени общего среднего образования в Республике Беларусь / М. А. Урбан, Г. Л. Муравьева // Проблеми сучасного підручника : зб. наук. пр. / Ін-т педагогіки Нац. акад. пед. наук України. – Київ, 2018. – Вип. 20. – С. 515–525.

### **Статьи в сборниках материалов научных конференций**

31. Урбан, М. А. Компьютерная визуализация как средство обучения моделированию условия задачи: из опыта разработки электронного средства обучения в Республике Беларусь / М. А. Урбан, С. И. Сергеев // Герценовские чтения. Начальное образование / Рос. гос. пед. ун-т. – СПб., 2011. – Т. 2, вып. 2 : Реализация идей устойчивого развития в начальном образовании: проблемы, поиски, решения. – С. 104–112.

32. Урбан, М. А. Схематическая модель на уроке математики: новые возможности компьютерной визуализации / М. А. Урбан // Герценовские чтения. Начальное образование / Рос. гос. пед. ун-т. – СПб., 2012. – Т. 3, вып. 1 : Начальное образование: соответствие стандарту. – С. 192–196.

33. Сергеев, С. И. Проблемы проектирования компьютерных инструментов в математическом образовании / С. И. Сергеев, М. А. Урбан // Математическое образование и информационное общество: проблемы и перспективы : сб. тр. XLVIII Всерос. (с междунар. участием) конф., 18–21 апр. 2012 г. / Рос. ун-т дружбы народов ; редкол.: С. В. Митрохина, М. С. Помелова (отв. ред.). – М., 2012. – С. 20–27.

34. Урбан, М. А. Диаграммы на уроке математики в начальной школе / М. А. Урбан // Герценовские чтения. Начальное образование / Рос. гос. пед. ун-т. – СПб., 2013. – Т. 4, вып. 1 : Начальное образование: направления развития. – С. 185–189.

35. Сергеев, С. А. Интегрирующая функция апплетов в математическом образовании / М. А. Урбан, С. И. Сергеев // Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании : сб. науч. тр. участников междунар. конф., Москва, 4–6 февр. 2013 г. / Рос. ун-т дружбы народов [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Саниной. – М., 2013. – С. 59–63.

36. Муравьева, Г. Л. Моделирование как теоретическая основа учебно-методического комплекса по математике для начальной школы / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан // Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном мире : сб. науч. тр. участников междунар. конф., Москва, 24–26 апр. 2013 г. / Рос. ун-т дружбы народов ; под общ. ред. Н. Б. Карабущенко. – М., 2013. – С. 331–335.

37. Урбан, М. А. «Метод изучения чисел» и его вклад в развитие метода учебного моделирования / М. А. Урбан // Подготовка учителя начальных классов: проблемы и перспективы : материалы III междунар. науч.-практ. конф., Минск, 14 нояб. 2013 г. / Белорус. гос. пед. ун-т ; редкол.: Н. В. Жданович [и др.]. – Минск, 2013. – С. 278–280.

38. Урбан, М. А. Абак в компьютерной обучающей программе как средство формирования понятия числа в начальном курсе математики [Электронный ресурс] / М. А. Урбан // Инновационные процессы в современной школе: методология, теория и практика : сб. ст. II Междунар. заоч. науч.-практ. конф., 24 апр. 2014 г. / Тул. гос. пед. ун-т ; общ. ред. С. В. Митрохина. – Тула, 2014. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

39. Урбан, М. А. Проблема мотивации педагога на достижение метапредметных результатов обучения в начальном математическом образовании / М. А. Урбан // Mathematical education : proc. of nat. conf., Yerevan, 22–23 Oct. 2015 / ed. H. S. Mikaelian. – Yerevan, 2015. – С. 218–222.

40. Урбан, М. А. Формирование умения самостоятельно строить визуальные модели к тексту задачи в начальном обучении математике / М. А. Урбан // Образовательное пространство детства: исторический опыт, проблемы, перспективы : сб. науч. ст. и материалов III междунар. науч.-практ. конф., Коломна, 1–3 июня 2016 г. / Гос. соц.-гуманитар. ун-т ; под общ. ред. О. Б. Широких. – Коломна, 2016. – С. 388–393.

41. Урбан, М. А. Текстовые задачи как средство подготовки учащихся к работе с компетентностно ориентированными заданиями в начальном обучении математике / М. А. Урбан, Г. Л. Муравьева // Герценовские чтения. Начальное образование / Рос. гос. пед. ун-т. – СПб., 2018. – Т. 9, вып. 1 : Начальное образование: путь в будущее. – С. 92–96.

#### **Тезисы докладов**

42. Урбан, М. А. Учебное моделирование как средство математического развития младших школьников с трудностями в обучении / М. А. Урбан // Развивающие технологии в общем и специальном образовании : материалы междунар. науч.-практ. конф., Коломна, 14–15 апр. 2009 г. / Колом. гос. пед. ин-т ; под общ. ред. О. Б. Широких. – Коломна, 2009. – С. 290–293.

43. Урбан, М. А. Принципы работы с учебными моделями на уроках математики в начальной школе / М. А. Урбан // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы : материалы VI всерос. науч.-практ. конф., Пенза, 13–14 мая 2010 г. / Пенз. гос. пед. ун-т; под ред. М. А. Родионова. – Пенза, 2010. – С. 234–238.

44. Урбан, М. А. Понимание смысла учебной информации как методическая проблема на уроках математики в начальной школе / М. А. Урбан // Гуманитаризация математического образования как общемировое явление: традиции и перспективы : материалы III междунар. науч.-практ. конф., Орехово-Зуево, 20 дек. 2010 г. / Моск. гос. обл. гуманитар. ин-т; отв. ред. Т. Н. Миракова. – Орехово-Зуево, 2010. – С. 70–74.

45. Урбан, М. А. Преобразование схематического чертежа как средство поиска решения задачи / М. А. Урбан // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы : материалы VII Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Артемовские чтения», Пенза, 12–13 мая 2011 г. / Пенз. гос. пед. ун-т; под общ. ред. М. А. Родионова. – Пенза, 2011. – Т. 1. – С. 169–172.

46. Урбан, М. А. Электронные средства обучения в начальном курсе математики: проблемы и перспективы / М. А. Урбан // Современное начальное образование: ВУЗ – Школа : сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, Москва, 24–25 мая 2012 г. / Моск. гос. гуманитар. ун-т; отв. ред. З. Б. Редько. – М., 2012. – С. 168–177.

47. Урбан, М. А. Проблема подготовки будущего учителя к использованию компьютерной обучающей программы в начальном курсе математики / М. А. Урбан // Психолого-педагогические проблемы на развитии личности на профессионалиста в условия на университетского образование : сб. с науч. докл. 14 междунар. науч. конф., Китев, 2–6 сент. 2014 г. / Ассоциацията на професорите от славянските страни; редкол.: Е. Рангелова [и др.]. – Габрово, 2014. – Кн. 1, т. 2. – С. 91–95.

48. Урбан, М. А. Развитие логического мышления младших школьников средствами учебного моделирования на уроке математики / М. А. Урбан, С. В. Гадзаова // Технологии развития личности обучающихся в условиях человекообразного образования : материалы X междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 75-летию ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно, 17–18 марта 2015 г. : в 2 ч. / Гродн. гос. ун-т; редкол.: В. П. Тарантей (гл. ред.) [и др.]. – Гродно, 2015. – Ч. 1. – С. 214–217.

49. Gadzaova, S. The role of the set of educational materials for teaching mathematics in primary school in the application of the idea of sustainable development / S. Gadzaova, H. Muravyova, M. Urban // Pathways of the future:

education of sustainable development : proc. of the intern. conf., Tallin, 22–24 Apr. 2015. – Tallin, 2015. – P. 129.

50. Урбан, М. А. Применение тестовых заданий электронного средства обучения «Математика. 2–4 классы» в процессе закрепления умения решать текстовые задачи / М. А. Урбан, Ю. В. Талай // Непрерывное математическое образование: проблемы, научные подходы, опыт и перспективы развития : сб. ст. всерос. (с междунар. участием) науч.-практ. конф., Москва, 16 июня 2016 г. / Шк. № 1021 г. Москвы ; редкол.: Е. И. Санина (отв. ред.) [и др.]. – М., 2016. – С. 74–78.

51. Гадзаова, С. В. Реализация идей устойчивого развития в процессе методической подготовки студентов к преподаванию математики на I ступени общего среднего образования / С. В. Гадзаова, Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан // Подготовка учителя начальных классов: проблемы и перспективы : материалы IV междунар. науч.-практ. конф., Минск, 27 окт. 2016 г. / Белорус. гос. пед. ун-т ; редкол.: Н. В. Жданович [и др.]. – Минск, 2017. – С. 294–296.

52. Урбан, М. А. Учебное пособие по математике как средство реализации содержания начального образования / М. А. Урбан // Curriculumul școlar: provocări și oportunități de dezvoltare : materialele conf. științifice intern., Chișinău, 7–8 dec. 2018 / Inst. de Științe ale Educației ; coord. șt.: L. Pogolșa, N. Vucon. – Chișinău, 2018. – P. 173–177.

### **Учебные и учебно-методические пособия**

53. Математика в подготовительном классе : учеб.-метод. пособие для педагогов спец. общеобразоват. шк. для детей с тяжелыми нарушениями речи и с задержкой психич. развития / В. Г. Андреева, С. В. Гадзаова, В. Л. Дрозд, М. А. Урбан. – Минск : НМЦентр, 2000. – 204 с.

54. Журавская, Е. В. Простые задачи в начальном курсе математики / Е. В. Журавская, М. А. Урбан. – Минск : Пачатк. шк., 2007. – 69 с.

55. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 1-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с нарушениями слуха / О. Т. Томукевич, М. А. Урбан. – Минск : Нар. асвета, 2009. – 131 с.

56. Урбан, М. А. Знаково-символические средства в преподавании начального курса математики (на примере изучения чисел и арифметических действий) : учеб.-метод. пособие / М. А. Урбан. – Минск : Издат. центр Белорус. гос. пед. ун-та, 2009. – 60 с.

57. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 2-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с нарушениями слуха : в 2 ч. / О. Т. Томукевич, М. А. Урбан ; под ред. И. К. Русакович. – Минск : Нар. асвета, 2010. – Ч. 1. – 135 с.

58. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 2-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с нарушениями слуха : в 2 ч. / О. Т. Томукевич, М. А. Урбан ; под ред. И. К. Русакович. – Минск : Нар. асвета, 2010. – Ч. 2. – 135 с.

59. Математика. 2–4 классы [Электронный ресурс] / М. А. Урбан, П. Л. Гращенко, А. Н. Шакутин, В. Р. Малец, А. В. Курбатов, А. В. Мешков. – Минск : Инфотриумф, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

60. Специальное образование. Математика. 1–5 классы [Электронный ресурс] / М. А. Урбан, О. Т. Томукевич, Е. В. Вагуро, П. Л. Гращенко, А. Н. Шакутин, В. Р. Малец, А. В. Курбатов, А. В. Мешков. – Минск : Инфотриумф, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

61. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 3-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с нарушениями слуха : в 2 ч. / О. Т. Томукевич, М. А. Урбан. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2011. – Ч. 1. – 132 с.

62. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 3-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с нарушениями слуха : в 2 ч. / О. Т. Томукевич, М. А. Урбан. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2011. – Ч. 2. – 140 с.

63. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 4-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с тяжелыми нарушениями речи, для детей с трудностями в обучении, для детей с нарушениями слуха : в 2 ч. / О. Т. Томукевич, М. А. Урбан. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2012. – Ч. 1. – 135 с.

64. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 4-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с тяжелыми нарушениями речи, для детей с трудностями в обучении, для детей с нарушениями слуха : в 2 ч. / О. Т. Томукевич, М. А. Урбан. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2012. – Ч. 2. – 144 с.

65. Муравьева, Г. Л. Математика в 3 классе : учеб.-метод. пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова. – Минск : Нац. ин-т образования, 2013. – 224 с.

66. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 5-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с тяжелыми нарушениями речи, для детей с трудностями в обучении, для детей с нарушениями слуха : в 2 ч. / О. Т. Томукевич, М. А. Урбан. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013. – Ч. 1. – 144 с.

67. Томукевич, О. Т. Математика : учеб. пособие для 5-го кл. спец. общеобразоват. шк. для детей с тяжелыми нарушениями речи, для детей с трудностями в обучении, для детей с нарушениями слуха : в 2 ч. /

О. Т. Томукевич, М. А. Урбан. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013. – Ч. 2. – 144 с.

68. Муравьева, Г. Л. Математика в 4 классе : учеб.-метод. пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова. – Минск : Нац. ин-т образования, 2014. – 232 с.

69. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 1-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – 2-изд., испр. и доп. – Минск : Нац. ин-т образования, 2015. – Ч. 1. – 104 с.

70. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 1-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – 2-изд., испр. и доп. – Минск : Нац. ин-т образования, 2015. – Ч. 2. – 144 с.

71. Математика в 1 классе : учеб.-метод. пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова, Е. В. Журавская, Е. А. Урбан. – 2-е изд., перераб. – Минск : Аверсэв, 2016. – 320 с.

72. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 2-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – 2-изд., испр. и доп. – Минск : Нац. ин-т образования, 2016. – Ч. 1. – 136 с.

73. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 2-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – 2-изд., испр. и доп. – Минск : Нац. ин-т образования, 2016. – Ч. 2. – 136 с.

74. Математика. 2 класс : рабочая тетр. : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, Е. В. Журавская, Е. А. Урбан. – 7-е изд., перераб. – Минск : Аверсэв, 2017. – 128 с.

75. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 3-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – 2-изд., испр. и доп. – Минск : Нац. ин-т образования, 2017. – Ч. 1. – 136 с.

76. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 3-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – 2-изд., испр. и доп. – Минск : Нац. ин-т образования, 2017. – Ч. 2. – 136 с.

77. Муравьева, Г. Л. Математика. 3 класс : самостоят. и контрол. работы : пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова. – Минск : Аверсэв, 2017. – 64 с.

78. Муравьева, Г. Л. Математика во 2 классе : пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова. – Минск : Аверсэв, 2018. – 239 с.

79. Муравьева, Г. Л. Математика. 1 класс : тетр. для стимулирующих занятий : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – Минск : Аверсэв, 2018. – 64 с.

80. Муравьева, Г. Л. Математика. 2 класс : тетр. для стимулирующих занятий : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, А. С. Обчинец. – Минск : Аверсэв, 2018. – 96 с.

81. Муравьева, Г. Л. Математика. 3 класс : тетр. для стимулирующих занятий : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – Минск : Аверсэв, 2018. – 95 с.

82. Муравьева, Г. Л. Математика. 4 класс : тетр. для стимулирующих занятий : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова. – Минск : Аверсэв, 2018. – 95 с.

83. Математика : рабочая тетр. : учеб. пособие для 1-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова, Е. В. Журавская, Е. А. Урбан. – Минск : Нац. ин-т образования, 2018. – Ч. 1. – 56 с.

84. Математика : рабочая тетр. : учеб. пособие для 1-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова, Е. В. Журавская, Е. А. Урбан. – Минск : Нац. ин-т образования, 2018. – Ч. 2. – 72 с.

85. Математика. 3 класс : рабочая тетр. : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, Е. В. Журавская, Е. А. Урбан. – Минск : Аверсэв, 2018. – 128 с.

86. Математика. 1 класс : самостоят. и контрол. работы : пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова, Е. А. Урбан. – 2-е изд., пересмотр. – Минск : Аверсэв, 2018. – 64 с.

87. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 4-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – 2-изд., испр. и доп. – Минск : Нац. ин-т образования, 2018. – Ч. 1. – 128 с.

88. Муравьева, Г. Л. Математика : учеб. пособие для 4-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения : в 2 ч. / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан. – 2-изд., испр. и доп. – Минск : Нац. ин-т образования, 2018. – Ч. 2. – 144 с.

89. Муравьева, Г. Л. Математика. 2 класс : самостоят. и контрол. работы : пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова. – Минск : Аверсэв, 2018. – 77 с.

90. Математика. 4 класс : рабочая тетр. : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, Е. В. Журавская, А. С. Обчинец. – 6-е изд., пересмотр. – Минск : Аверсэв, 2019. – 127 с.

91. Муравьева, Г. Л. Математика. 4 класс : самостоят. и контрол. работы : пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова. – 2-е изд. – Минск : Аверсэв, 2019. – 64 с.

#### **Учебно-программная документация**

92. Моделирование в учебном процессе. Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности 1-01 02 01 «Начальное образование» / Белорус. гос. пед. ун-т ; сост. М. А. Урбан. – Минск : [б. и.], 2015. – 21 с.

93. Методика преподавания математики и практикум по решению задач. Типовая учебная программа по учебной дисциплине для специальности 1-01 02 01 «Начальное образование» / Белорус. гос. пед. ун-т ; сост.: Г. Л. Муравьева, М. А. Урбан, С. В. Гадзаова. – Минск : [б. и.], 2015. – 19 с.

## РЭЗІЮМЭ

Урбан Марыя Анатольеўна

### «Метадычная сістэма пачатковага навучання матэматыцы с выкарыстаннем вучэбнага мадэлявання»

**Ключавыя словы:** вучэбнае мадэляванне, вучэбная мадэль, уменне мадэляваць, агульнавучэбнае ўменне, пачатковае навучанне матэматыцы, метадычная сістэма, I ступень агульнай сярэдняй адукацыі.

**Мэта даследавання:** тэарэтычна абгрунтаваць, распрацаваць і рэалізаваць у адукацыйнай практыцы метадычную сістэму пачатковага навучання матэматыцы з выкарыстаннем вучэбнага мадэлявання.

**Метады даследавання:** тэарэтычныя (аналіз філасофскай, псіхалага-педагагічнай і навукова-метадычнай літаратуры), сацыёлага-педагагічныя (абагульненне айчыннага і замежнага вопыту пачатковага навучання матэматыцы, аналіз нарматыўных дакументаў і вучэбных дапаможнікаў па матэматыцы, назіранне, гутаркі, анкетаванне), эксперыментальныя (педагагічны эксперымент, апрацоўка вынікаў эксперыменту метадамі матэматычнай статыстыкі).

**Атрыманыя вынікі і іх навізна.** У даследаванні вызначаны тэарэтычныя асновы пачатковага навучання матэматыцы з выкарыстаннем навучальнага мадэлявання, удакладнены паняцці «вучэбная мадэль» і «вучэбнае мадэляванне» з улікам спецыфікі пачатковага навучання матэматыцы, распрацаваны канцэпцыя і метадычная сістэма пачатковага навучання матэматыцы з выкарыстаннем вучэбнага мадэлявання; створаны вучэбна-метадычны комплекс па матэматыцы для I ступені агульнай сярэдняй адукацыі на аснове вучэбнага мадэлявання і эксперыментальна праверана эфектыўнасць яго скарыстання ў адукацыйным працэсе пачатковай школы.

**Рэкамендацыі па выкарыстанні вынікаў.** Атрыманыя вынікі могуць быць выкарыстаны ў даследаванні тэарэтычных і практычных праблем метадыкі пачатковага навучання матэматыцы, у працэсе пачатковага навучання матэматыцы ва ўстановах агульнай сярэдняй адукацыі, на факультэтах падрыхтоўкі настаўнікаў пачатковых класаў, у сістэме павышэння кваліфікацыі настаўнікаў пачатковых класаў.

**Галіна ўжывання:** метадыка пачатковага навучання матэматыцы, дыдактыка пачатковай школы, педагагічная псіхалогія.

## РЕЗЮМЕ

Урбан Мария Анатольевна

### **«Методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования»**

**Ключевые слова:** учебное моделирование, учебная модель, умение моделировать, общеучебное умение, начальное обучение математике, методическая система, I ступень общего среднего образования.

**Цель работы:** теоретически обосновать, разработать и реализовать в образовательной практике методическую систему начального обучения математике с использованием учебного моделирования.

**Методы исследования:** теоретические (анализ философской, психолого-педагогической и научно-методической литературы), социолого-педагогические (обобщение отечественного и зарубежного опыта начального обучения математике, анализ нормативных документов и учебных пособий по математике, наблюдение, беседы, анкетирование), экспериментальные (педагогический эксперимент, обработка результатов эксперимента методами математической статистики).

**Полученные результаты и их новизна.** В исследовании определены теоретические основания начального обучения математике с использованием учебного моделирования, уточнены понятия «учебная модель» и «учебное моделирование» с учетом специфики начального обучения математике, разработаны концепция и методическая система начального обучения математике с использованием учебного моделирования; создан учебно-методический комплекс по математике для I ступени общего среднего образования на основе учебного моделирования и экспериментально проверена эффективность его применения в образовательном процессе начальной школы.

**Рекомендации по использованию результатов.** Полученные результаты могут быть использованы в исследовании теоретических и практических проблем методики начального обучения математике, в процессе начального обучения математике в учреждениях общего среднего образования, на факультетах подготовки учителей начальных классов, в системе повышения квалификации учителей начальных классов.

**Область применения:** методика начального обучения математике, дидактика начальной школы, педагогическая психология.

## SUMMARY

Maria A. Urban

### «The methodical system of primary mathematical teaching with use of educational modelling»

**Key words:** educational modelling, educational model, modelling skills, general skills, mathematics at primary schools, teaching methods, first stage of schooling.

**Research goals:** theoretical grounding, development, and implementation of educational modelling as a method of teaching mathematics at primary schools

**Methodology:** theoretical (overview of philosophical, psychological, and pedagogical literature), socio-pedagogical (summary of national and international experience of teaching mathematics at primary schools, analysis of guidelines and manuals, participant observation, interviews, questionnaires), experimental (educational experiment with subsequent statistical analysis of the data collected)

**Results and contribution.** This research defines theoretical grounds for the application of educational modelling at primary mathematics lessons; it specifies the concepts of «educational model» and «educational modeling» in the context of primary mathematics education; it further provides guidelines for teaching mathematics at primary schools with the use of educational modelling; finally, it introduces new modelling-oriented learning materials for primary schools which proved to have considerable positive effect upon learning results during the experiment.

**Recommendations for the application of the findings.** The findings can be utilized in further research on theoretical and practical challenges in teaching mathematics at primary level, practical recommendations can be applied by teachers of mathematics in classrooms, the discovered benefits of educational modelling add to the scope of efficient teaching tools that can be learned by Education students as well as by teachers during advanced professional training.

**Application fields:** methodology of teaching mathematics, primary school didactics, educational psychology.