

УДК [37.016 : 51] : 373.3.046-021.64

**М. А. УРБАН**, ПРОФЕССОР КАФЕДРЫ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН  
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ МАКСИМА ТАНКА,  
ДОКТОР ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК, ДОЦЕНТ

9

## ПРОБЛЕМА ПОНИМАНИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ: ТЕОРИЯ Р. СКЕМПА И ШКОЛЬНАЯ ПРАКТИКА

### АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается проблема понимания изучаемых математических понятий; описывается теория реляционного и инструментального понимания Р. Скемпа; приводятся результаты выполнения заданий студентами и анкетирования учителей, которые подтверждают наличие проблемы в достижении реляционного понимания математических понятий учащимися.

### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

понимание; реляционное понимание; инструментальное понимание; обучение математике; начальное обучение математике.

### ABSTRACT

The article deals with the problem of understanding the studied mathematical concepts; describes the theory of relational and instrumental understanding by R. Skemp; the results of the student assignments and the questioning of teachers are given, which confirm the existence of a problem in achieving a relational understanding of mathematical concepts by students.

### KEYWORDS

understanding; relational understanding; instrumental understanding; mathematics education; elementary mathematics education.

### ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Изучение математики в школе традиционно связано с трудностями учащихся в понимании учебного материала и его дальнейшем сознательном применении. Все принципы дидактики в той или иной степени направлены на достижение понимания математических идей школьниками разных возрастов. Однако до сих пор учёные не имеют однозначного мнения о причинах понимания поступающей информации одними детьми и, соответственно, её непонимания другими. Почти полвека назад А. А. Столяр писал, что «мы по существу не знаем точно, что значит “понимать”. ... Заключение о том, что ученик понял (а не только знает) материал, является лишь правдоподобным, но не достоверным» [6, с. 67]. Слова учёного продолжают быть актуальными и в наши дни.

Феномен понимания — объект изучения разных наук: философии, психологии, педагогики, методик преподавания. В философии «понимание» трактуют как «нахождение или приписывание смысла элементам любой (материальной или идеальной) реальности» и связывают с понятиями «смысл», «научное понимание». В современной философии особое направление — герменевтика — занимается проблемами истолкования и интерпретации текстов различной природы, достижения взаимопонимания участников когнитивных коммуникаций [2].

Понимание в психолого-педагогических источниках определяется с разных точек зрения: как *мыслительный процесс* («мыслительная процедура, связанная с включением нового содержания в систему устоявшихся идей, понятий и представлений» [4, с. 179]); как *результат* этого процесса («продукт процесса понимания — само

толкование чего-нибудь» [5, с. 395]); один из достигнутых уровней обученности (знание, понимание, применение, анализ, синтез, оценка [11]); как *качество личности* («способность человека выявить признаки и свойства учебного элемента, устанавливать содержательные, системные и логические связи между разными учебными элементами, переводить математическое знание на разные языки представления» [3, с. 132–133]).

В мировом математическом педагогическом сообществе также нет единства в отношении того, что подразумевать под «пониманием математики». Представления учёных о математическом понимании сильно различаются и могут варьировать от простого запоминания математических фактов до оценки «математического шедевра» (например, оригинального доказательства) [10, с. 20]. К. Крамер и Л. Карновски связывают понимание в математике со способностью представлять математические идеи различными способами и строить связи между множественными репрезентациями [7]. Вариативность представления изучаемых понятий и способов действий как фактор и результат процесса понимания в математике подчёркивается в большом числе исследований, для обеспечения вариативности важно представить хотя бы две репрезентации изучаемого, выполненные на разных «языках» [12]. Подобная репрезентационная вариативность считается в современной дидактике важной основой, влияющей на понимание математики учащимися [8].

Говоря о феномене понимания в математике, Дж. Хиберт и П. Лефевр подчёркивают различия между концептуальными и процедурными знаниями: под концептуальным знанием они подразумевают понимание сущности понятий, а процедурным — умение решать задачи. Исследователи отмечают, что в обучении критически важно обеспечить взаимодействие двух этих видов знаний [9]. Тем не менее в последнее время по причине математизации и интеграции научного знания отмечается рост интереса именно к проблеме концептуального понимания в математике. В работе Е. В. Кузнецовой и Н. Ю. Жбановой описаны признаки концептуального понимания математики учащимися, к которым относятся, например,

способность обосновать свои действия при решении задачи; знание границ применимости теории и умение привести примеры и контрпримеры; возможность использовать альтернативные подходы; умение переходить в другие контексты; способность выполнить различные репрезентации объекта (формулы, графики, таблицы); способность составить аналогичную задачу [1].

Несмотря на растущий интерес к проблеме понимания в обучении математике, до сих пор остаётся открытым вопрос о том, какие его виды важны для обучения, какое понимание математики демонстрируют учащиеся на практике, какими могут быть причины преобладания определённого вида понимания. Поэтому *целью* данной статьи является описание видов понимания учебного математического материала учащимися, выявление доминирующего в практике обучения вида понимания и возможных причин преобладания этого вида понимания.

### РЕЛЯЦИОННОЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЕ ПОНИМАНИЕ МАТЕМАТИКИ В ТЕОРИИ Р. СКЕМПА

Исследование Р. Скемпа было посвящено изучению особенностей реляционного и инструментального понимания математических идей учащимися. Р. Скемп характеризует *инструментальное (instrumental)* понимание как знание «правил без причин» (*rules without reasons*). Он отмечает, что для многих учителей и учащихся математическое понимание сводится только к овладению правилом, умению применять его. Инструментальное понимание позволяет получить ответ на вопрос: «Как это делать?». *Реляционное (relational)* понимание по Р. Скемпу — понимание в собственном смысле слова, поскольку позволяет получить ответ на два вопроса: «Как это делать?» и «Почему это нужно делать именно так?» Причину большинства затруднений учащихся в математике автор видит в ориентации обучения на инструментальное понимание вместо реляционного [13].

Р. Скемп приводит примеры, показывающие различие между инструментальным и реляционным пониманием для школьников различных возрастов. Например, дети могут хорошо владеть формулой вычисления



площади прямоугольника и успешно выполнять соответствующие задания, демонстрируя инструментальное понимание. Однако они часто не понимают, почему площадь прямоугольника вычисляется именно с помощью умножения числового значения длины на числовое значение ширины. Учащиеся могут знать и применять правило умножения дробей, но не понимать причин выполнения отдельных операций в соответствии с этим правилом. В приведённых примерах у детей есть инструментальное понимание, но отсутствует реляционное понимание [13]. В дальнейшем это приводит к ошибкам, которые отмечают многие учителя: дети смешивают понятия «периметр» и «площадь», применяют формулу вычисления площади прямоугольника к любым другим многоугольникам, ошибаются при выполнении действий с дробными числами.

Р. Скемп, сравнивая особенности инструментального и реляционного понимания, приводит положительные стороны каждого из них. К положительным аспектам инструментального понимания можно отнести следующие особенности.

- Относительная лёгкость быстрого освоения нового умения. Запомнить правила типа «минус на минус дают плюс» (*minus times minus equals plus*) или «чтобы разделить число на дробь, нужно эту дробь перевернуть и затем выполнить умножение» (*to divide by a fraction you turn it upside down and multiply*) можно легко и быстро. Если цель обучения — получить ответ, совпадающий с ответами на последней странице учебника, то инструментальная математика предоставляет более комфортный путь к этой цели.

- Быстрый и очевидный результат, или «награда», получаемая ребёнком после выполнения задания. Это приятно — увидеть, что твой ответ верный, и подобная ситуация успеха, достигаемая быстро и легко, привлекает многих учащихся.

- Так как при инструментальном понимании требуется меньше знаний, часто можно получить правильный ответ быстрее и надёжнее.

Положительными аспектами реляционного понимания по Р. Скемпу являются следующие особенности.

- Оно адаптивнее к новым задачам. Если инструментальное понимание требует освоения нового метода к каждой новой задаче, то реляционное позволяет эти методы изобретать самостоятельно.

- Оно облегчает запоминание (и это своеобразное следствие из указанного выше преимущества), поскольку требует осознания одного общего подхода вместо заучивания комплекса отдельных правил.

- Оно положительно влияет на внутреннюю мотивацию к учению и сокращает использование учителем таких приёмов, как внешнее награждение и наказание.

- Оно может стать общим подходом к решению не только математических задач, но и других учебных и жизненных ситуаций [13].

Какое же понимание математики преобладает у учащихся после школьного обучения? Результаты поиска ответа на данный вопрос представлены в следующем разделе статьи.

## ХОД И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В 2022 г. было выполнено исследование, направленное на изучение реляционного и инструментального понимания математики учащимися. Исследование проводилось в два этапа на базе факультета начального образования Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка и Минского городского института развития образования.

На *первом этапе* была поставлена задача выявить доминирующий вид понимания математического материала студентами, которые ещё не изучили дисциплину «Методика преподавания математики» и опирались на знания по математике, полученные в школе.

Студентам было предложено выполнить два задания в соответствии с примерами Р. Скемпа: в задании 1 нужно было вычислить площадь прямоугольника с указанными длинами сторон; в задании 2 — объяснить, почему площадь прямоугольника вычисляется именно таким способом. Диагностическую контрольную работу выполняли 74 студента. Результаты выполнения заданий показаны в таблице 1.

Таблица 1

Результаты выполнения задания 1

Верное выполнение	Выполнение с недочётами	Неверное выполнение	Всего
43	28	3	74
58 %	38 %	4 %	100 %

Первое задание верно и без недочётов выполнили 43 студента (58 %), 28 студентов (38 %) допустили неточности, неверно указав единицу измерения площади, 3 студента (4 %) вычислили площадь прямоугольника неверно.

Результаты выполнения второго задания показаны в таблице 2.

Таблица 2

Результаты выполнения задания 2

Верный ответ	Ответ «Не знаю»	Неверный ответ	Всего
11	11	52	74
15 %	15 %	70 %	100 %

На второй вопрос ответили верно 11 студентов (15 %). Эти студенты выполнили рисунок, показав на нём прямоугольник с длинами сторон 5 см и 3 см, разбитый на квадраты с длиной стороны 1 см. На рисунке видно, что в одном ряду вдоль длины прямоугольника помещается 5 квадратов, и таких рядов всего 3, что соответствует числовым значениям длин сторон прямоугольника (рис. 1).

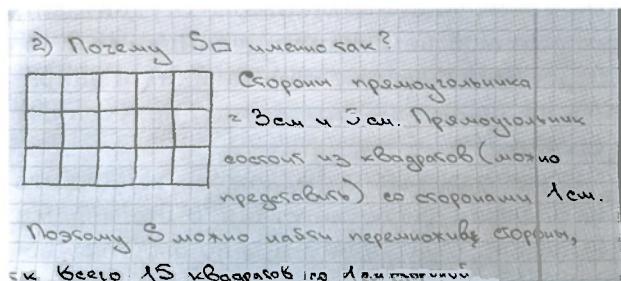


Рисунок 1 — Пример выполнения задания студентом

Ответ «не знаю» дали 11 студентов (15 %), остальные 52 студента (70 %) предложили ответы, которые демонстрируют непонимание

сущности способа вычисления площади. Среди ответов в этой группе наиболее распространённым был ответ: «Потому что такая формула» (29 ответов, или 39 %).

Полученные результаты показывают, что у студентов преобладает инструментальное понимание: ведь они верно применили формулу вычисления площади прямоугольника, пусть и с некоторыми недочётами (только 3 % студентов дали ошибочный ответ). Реляционное понимание было обнаружено только у 15 % студентов, и это свидетельствует о выявленной проблеме понимания учебного материала, который входит в содержание школьного курса математики.

На *втором этапе* была поставлена задача определить возможные причины выявленной проблемы. Для этого было проведено анкетирование 75 учителей начальных классов на факультете начального образования Белорусского государственного педагогического университета и в Минском городском институте развития образования. Учителям были предложены 8 указанных ниже вопросов, входящих в тему «Сложение и вычитание чисел в пределах 100».

1. Сочетательное свойство сложения.
2. Рациональные способы вычислений.
3. Ознакомление с конкретными приёмами прибавления к двузначному числу однозначного числа.
4. Правило прибавления числа к сумме и суммы к числу.
5. Изучение конкретных приёмов прибавления двузначного числа к двузначному числу.
6. Правило вычитания числа из суммы и суммы из числа.
7. Изучение конкретных приёмов вычитания из двузначного числа однозначного числа.
8. Изучение конкретных приёмов вычитания двузначного числа из двузначного числа.

Три вопроса из данного перечня (первый, четвёртый и шестой) обеспечивали достижение реляционного понимания темы детьми, так как были связаны с изучением свойств арифметических действий, лежащих в основе вычислений. Остальные вопросы требовали инструментального понимания (отработка конкретных приёмов вычислений).



Учителям было предложено оптимизировать распределение учебных часов на изучение всей темы и выбрать вопросы, на рассмотрение которых было бы целесообразно сократить количество времени, чтобы направить это освободившееся время на изучение других вопросов темы. Количество вопросов для выбора не было ограничено. Большая часть опрошенных посчитала целесообразным сократить время на изучение вопросов, связанных с реляционным пониманием (сочетательное свойство сложения — 30 учителей, правило прибавления числа к сумме и суммы к числу — 30 учителей, правило вычитания числа из суммы и суммы из числа — 21 учитель). Сокращение времени на изучение других вопросов темы, связанных с инструментальным пониманием, было предложено значительно меньшим числом учителей (от 5 до 11). Полученные результаты говорят о ценностном отношении учителей к проблеме реляционного и инструментального понимания и позволяют сделать вывод, что в практике обучения математике больше усилий направляется на формирование вычислительных приёмов, часто за счёт времени, которое полезнее было бы уделить ознакомлению с математическими основаниями этих приёмов. Возможные следствия подобного ценностного отношения рассмотрим в следующем разделе статьи.

### ВАРИАНТЫ СОЧЕТАНИЙ СТИЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ И УЧЕНИЯ

Р. Скемп подчёркивал роль отношения учителя к выбору стиля обучения. Он называет один из разделов своей статьи «Адвокат дьявола» и начинает его с провокационного вопроса: «Раз так много учителей преподают инструментальную математику, может быть, это потому, что она даёт определенные преимущества?» [14]. Рассуждения Р. Скемпа удобно представить в виде матрицы сочетаний различных стилей преподавания и учения, отличающихся видом используемого понимания в изучении математики (таблица 3).

При использовании *первого* стиля и учитель и учащиеся предпочитают опираться на инструментальное понимание. В *краткосрочной* перспективе это позволяет достичь определённой гармонии, поскольку

есть соответствие между целями учителя и ребёнка. Но в данной ситуации учащиеся не могут определить верность выполнения задания, пока этого не скажет учитель. В *долгосрочной* перспективе школьники усваивают большое количество правил, но степень понимания материала у них невысокая. Учащиеся могут довольно успешно проходить различные математические тесты, но перестают интересоваться математикой, как только появляется такая возможность.

*Второй* стиль представляет собой сочетание реляционного преподавания с желанием детей учиться инструментально. В *краткосрочной* перспективе это приводит к фрустрации как для учителя, так и для учащихся: дети не хотят знать ответ на вопрос «почему?» и ориентированы только на усвоение алгоритмов («только скажите, как это делать»). Однако в *долгосрочной* перспективе здесь отмечаются позитивные изменения, так как и учащиеся и учитель развивают реляционное понимание математики. Дети в будущем могут продолжать интересоваться математикой и даже выбирать работу, связанную с ней.

Если применяется *третий* стиль, учитель ориентируется на инструментальное преподавание, а учащиеся хотят достичь реляционного понимания. В *краткосрочной* перспективе можно заметить стремление ребёнка осмыслить то, что преподают инструментально, достичь глубины понимания того, что объяснялось «мелко». В *долгосрочной* перспективе учащиеся могут почувствовать, что они недостаточно сообразительные, чтобы понимать учебный материал. Они начинают отвлекаться, перестают заниматься

Таблица 3

Стили обучения по Р. Скемпу

	Ребёнок: инструментальное понимание	Ребёнок: реляционное понимание
Учитель: инструментальное понимание	Стиль 1	Стиль 3
Учитель: реляционное понимание	Стиль 2	Стиль 4

математикой, говорят всем, что не понимают её.

При использовании *четвёртого* стиля учитель и учащиеся опираются на реляционное понимание. В *краткосрочной* перспективе они стремятся освоить как сами алгоритмы действий, так и их основания. В *долгосрочной* перспективе у учителя и учащихся развивается реляционное понимание математических понятий, дети продолжают интересоваться математикой и часто выбирают работу, связанную с ней.

Р. Скемпа отмечает, что современные учебные программы по математике направлены на обеспечение реляционного понимания. Однако актуальным остаётся вопрос о том, в какой степени эта направленность будет реализована в практике обучения и не будут ли по новым программам преподавать инструментально, как по программам предыдущего поколения [13].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненное исследование позволяет сделать ряд выводов.

- Несмотря на отсутствие единства в толковании сущности понятия «понимание», в педагогическом математическом сообществе говорят о двух его видах (понимание,

связанное с умением выполнять математические процедуры, и понимание теоретических оснований этих процедур).

- Примером дифференциации двух видов понимания в обучении математике является теория реляционного и инструментального понимания Р. Скемпа, по мнению которого инструментальное понимание позволяет получить ответ на вопрос: «Как это делать?», а реляционное — на два вопроса: «Как это делать?» и «Почему эту нужно делать именно так?»

- Результаты исследования, проведённого на факультете начального образования, говорят о доминировании инструментального понимания студентами некоторых понятий школьного курса математики.

- Результаты анкетирования учителей в Минском городском институте развития образования свидетельствуют о предпочтении ими тех учебных тем программы, которые позволяют обеспечить только инструментальное понимание.

- Обучение математике, направленное на реляционное понимание, связано в большой степени с отношением учителей к этой проблеме, поскольку именно учитель может либо усилить, либо нивелировать развивающую направленность современных учебников математики.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кузнецова, Е. В. Формирование концептуального понимания математики у студентов технических университетов / Е. В. Кузнецова, Н. Ю. Жбанова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Психолого-педагогические науки. – 2020. – № 3 [47]. – С. 77-90.
2. Лебедев, С. А. Философия науки: Словарь основных терминов [Электронный ресурс] / С. А. Лебедев. – Режим доступа: – <https://clck.ru/32UeJo>. Дата доступа: 11.09.2022.
3. Лунгу, К. Н. Дидактический аспект понимания как необходимого условия формирования профессиональной компетентности студентов / К. Н. Лунгу, Е. И. Смирнов, В. В. Югин // Ярославский педагогический вестник. – 2013. – Т. 2 – № 1. – С. 131-137.
4. Понимание // Белорусская педагогическая энциклопедия : в 2 т. / ред. кол. Н. П. Баранова [и др.]. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2015. – Т. 2. – С. 179.
5. Понимание // Большой психологический словарь / Под ред. Б. Г. Мещерякова, и В. П. Зинченко. – М. : Олма-Пресс, 2003. – 672 с.
6. Столяр, А. А. Педагогика математики : Курс лекций / А. А. Столяр. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 1974. – 384 с.
7. Cramer, K. The importance of informal language in representing mathematical ideas [Electronic resource] / K. Cramer, L. Karnowski // Teaching Children Mathematics. – Vol. 1. – Issue 6. Mode of access: <https://go.gale.com/ps/i.do?p=AONE&u=googlescholar&id=6ALEJA16654586&v=2.1&it=r&sid=AONE&asid=789731ad>. – Date of access: 11.07.2022.

8. *Goldin, G. A.* Mathematical representation [Electronic resource] / G. A. Goldin // Encyclopedia of Mathematics Education. – Lerman, S. [eds]. – Springer, Cham. – Mode of access: – [https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9\\_103-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_103-4). – Date of access: 09.09.2022.
9. *Hiebert, J.* Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an in-troductory analysis [Electronic resource] / J. Hiebert, P. Lefevre // New York: Routledge. – Mode of access: [doi.org/10.4324/9780203063538](https://doi.org/10.4324/9780203063538). – Date of access: 17.11.2020.
10. *Hoosain, E.* *What Does It Mean to Understand Mathematics?* [Electronic resource] / E. Hoosain // Humanistic Mathematics Network Journal: Iss. 25. – Mode of access: <https://scholarship.claremont.edu/hmnj/vol1/iss25/9/>. – Date of access: 11.07.2022.
11. *Huitt, W.* Bloom et al.'s taxonomy of the cognitive domain [Electronic resource] / W. Huitt // Educational Psychology Interactive. – Valdosta, GA : Valdosta State University. – Mode of access: <http://www.edpsycinteractive.org/topics/cognition/bloom.html>. – Date of access: 24.05.2022.
12. *Nizaruddin, N.* The validity of a multiple representation of calculus with mathematica learning tool for improving students' productive thinking abilities / N. Nizaruddin, S. Sutrisno, V. H. Murtianto // 4th International Conference on Education and Social Science Research [ICESRE], KnE Social Sciences. – Mode of access: 10.18502/kss.v7i14.12012. – Date of access: 07.08.2022.
13. *Skemp, R. R.* Mathematics in the primary school [Electronic resource] / R. R. Skemp. – Mode of access: <https://anyflip.com/vjymi/simu/basic>. – Date of access: 17.05.2022.
14. *Skemp, R.* Relational Understanding and Instrumental Understanding [Electronic resource] / R. Skemp. – Mode of access: <http://www.skemp.org.uk/>. – Date of access: 25.09.2022.

## ВНИМАНИЕ: ПОДПИСКА!

Идёт подписка на журнал «Матэматыка і фізіка» на первое полугодие 2023 года. Оформить её можно в любом почтовом отделении, а также в киосках «Белдрук». Не выходя из дома можно подписаться на наш журнал через сайты издательства «АіВ», [belpressa.by](http://belpressa.by).

Подписные индексы:

- 75069 – для индивидуальных подписчиков;
- 750692 – для организаций;
- 665 – [belpressa.by](http://belpressa.by).