В. В. Шлыков, профессор кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, доктор педагогических наук, профессор

17 БГПУ

СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Аннотация. Данные материалы предлагаются учителям для организации учебной деятельности учащихся VIII класса при обучении геометрии. Для обозначения уровня задач используются три вида обозначений: кружок (1°), номер без обозначений (2), звёздочка (3*). Задачи, отмеченные номером с кружком, должны решать все учащиеся; задачи с номером без обозначения относятся к среднему уровню сложности; номерами со звёздочкой отмечены задачи более высокого уровня сложности.

Трапеция. Средняя линия трапеции

Трапеция

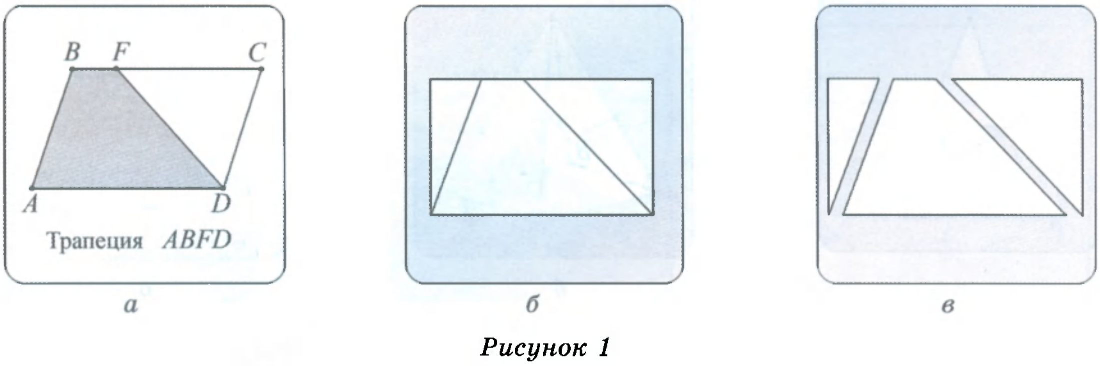
Среди множества четырёхугольников выделяются такие, у которых две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Такие четырёхугольники имеют специальное название — *трапеции*.

> ***Трапецией*** называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.
>
> ***Основаниями трапеции*** называются её параллельные стороны, а не параллельные — ***боковыми сторонами***.

Чтобы установить, что четырёхугольник является трапецией, нужно доказать параллельность двух его сторон и непараллельность двух других сторон.

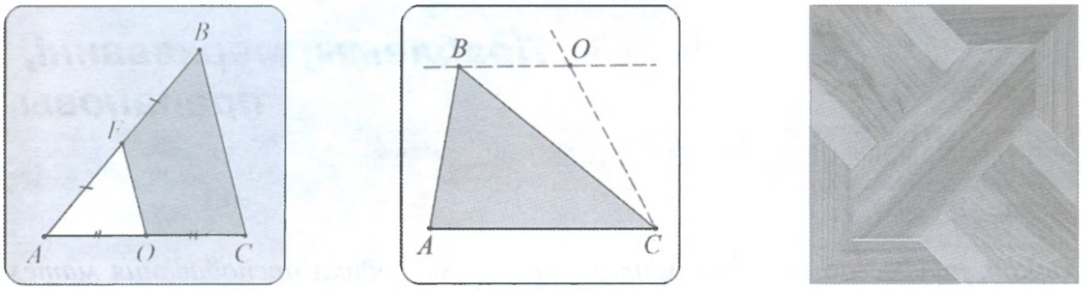
Например, пусть $ABCD$ — параллелограмм, а точка F — внутренняя точка отрезка BC, тогда четырёхугольник $ABFD$ — трапеция, основания которой — отрезки BF и AD, а боковые стороны — отрезки AB и FD (рис. 1, *а*).

Модель трапеции получим, если от листа бумаги прямоугольной формы отрежем два уголка, имеющих форму прямоугольных треугольников, как показано на рисунке 1, *б*, *в*.



а *б* *в*

Рисунок 1



а *б* *в*

Рисунок 2

Пусть ABC — произвольный треугольник, отрезок OF — его средняя линия (рис. 2, *а*). Тогда четырёхугольник $OFBC$ — трапеция ($OF \parallel BC$, прямые FB и OC пересекаются).

Пусть O — точка пересечения прямых, одна из которых проходит через вершину B треугольника ABC и параллельна стороне AC, а другая — через вершину C и не параллельна стороне AB (рис. 2, *б*). Тогда четырёхугольник $ABOC$ — трапеция, диагональю которой является сторона BC треугольника ABC, а её боковой стороной и основанием — стороны AB и AC этого треугольника.

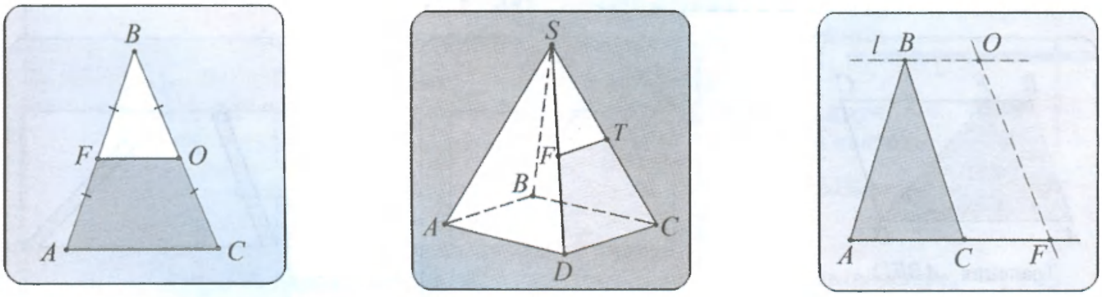
В практической деятельности в форме трапеции делают скаты крыш некоторых типов домов. Для создания орнаментов паркетной плитки используют паркетную доску в форме трапеции (рис. 2, *в*).

Трапеция называется ***равнобедренной***, если её боковые стороны равны.

Например, если ABC — равнобедренный треугольник, а точки F и O — середины боковых сторон AB и BC соответственно, то четырёхугольник $AFOC$ — равнобедренная трапеция (рис. 3, *а*). Действительно, $FO \parallel AC$, так как отрезок FO — средняя линия треугольника ABC, стороны AF и OC не параллельны и $AF = OC = \frac{1}{2}BC$.

Если точки F и T — середины рёбер правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, то четырёхугольник $DFTC$ — равнобедренная трапеция, которая является частью грани SCD (рис. 3, *б*).

Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведём прямую l, параллельную его основанию и отметим на ней точку O (рис. 3, *в*). Пусть F — точка пересечения прямой AC и прямой, проходящей через точку O и параллельной стороне BC. Тогда $ABOF$ — равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна боковой стороне треугольника ABC.



а *б* *в*

Рисунок 3

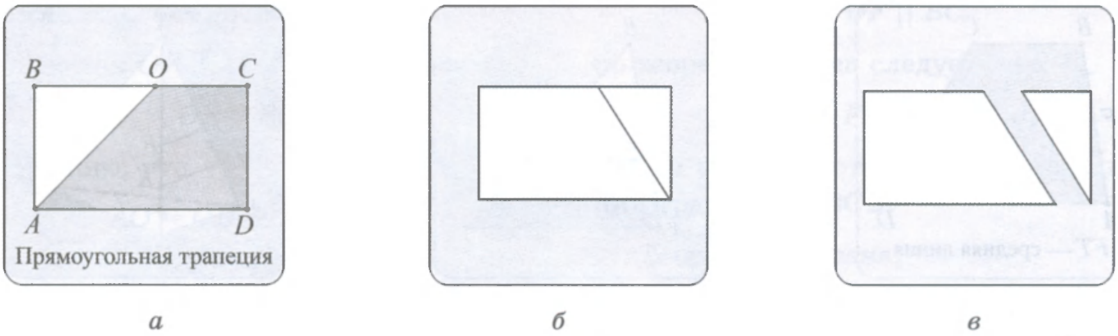


Рисунок 4

> Трапеция называется ***прямоугольной***, если один из её углов прямой.

Например, пусть $ABCD$ — прямоугольник, а O — внутренняя точка отрезка BC, тогда четырёхугольник $AOCD$ — прямоугольная трапеция (рис. 4, *а*).

Если от листа бумаги прямоугольной формы отрезать часть, имеющую форму прямоугольного треугольника, как показано на рисунке 4, *б*, *в*, тогда оставшаяся часть имеет форму прямоугольной трапеции.

Модель прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основаниями которой являются прямоугольные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 5, *а*), получим, если от деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, отпилим часть в форме прямой треугольной призмы, основаниями которой являются прямоугольные треугольники, как показано на рисунке 5, *б*, *в*.

> ***Высотой трапеции*** называется перпендикуляр (или его длина), проведённый из любой точки прямой, содержащей одно основание, к прямой, содержащей другое основание.

Высота CL трапеции $ABCD$ одновременно является высотой каждого из треугольников ABC и ACD, проведённой к сторонам BC и AD соответственно (рис. 6, *а*).

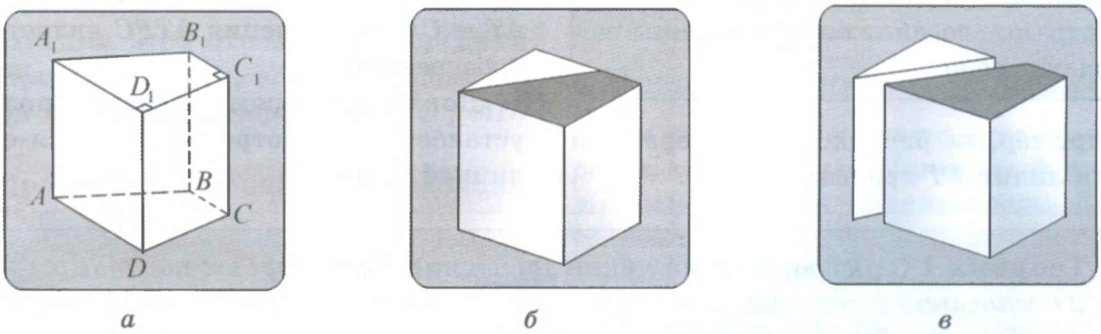


Рисунок 5

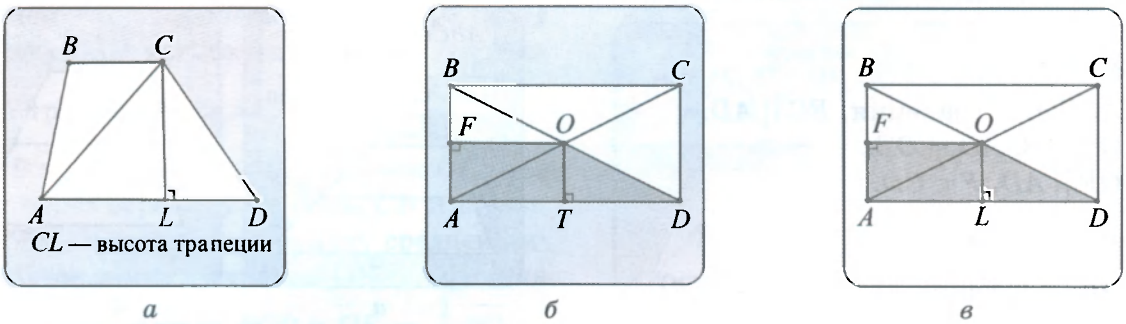
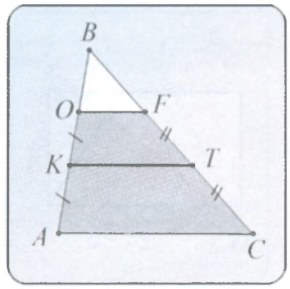
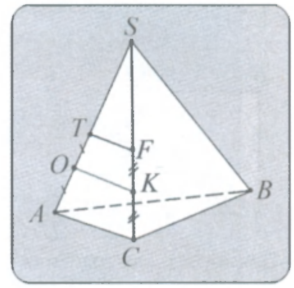


Рисунок 6

а



б



в

Рисунок 7

Пусть $ABCD$ — прямоугольник, диагонали которого пересекаются в точке O, а точки F и T — середины сторон AB и AD соответственно (рис. 6, *б, в*). Тогда, например, отрезки FA и OT — высоты прямоугольной трапеции $AFOD$. Действительно, $FA \perp AD$, так как $ABCD$ — прямоугольник, а $OT \perp AD$, так как медиана OT, проведённая к основанию AD в равнобедренном треугольнике AOD, является высотой.

Средняя линия трапеции

Рассмотрим понятие средней линии трапеции, её признак и свойства.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

Например, на рисунке 7, *а* изображена средняя линия FT трапеции $ABCD$.

Пусть точки O и F принадлежат сторонам AB и BC треугольника ABC соответственно и $OF \parallel AC$, а точки K и T — середины отрезков AO и FC соответственно (рис. 7, *б*). Тогда четырёхугольник $AOFC$ — трапеция, а отрезок KT — её средняя линия.

Пусть $SABC$ — тетраэдр, точки T и F — середины его рёбер SA и SC, а точки O и K — середины отрезков AT и CF соответственно (рис. 7, *в*). Тогда отрезок OK — средняя линия равнобедренной трапеции $ATFC$, которая расположена в грани SAC. Действительно, $TF \parallel AC$, так как отрезок TF — средняя линия треугольника ASC, а отрезки AT и CF не параллельны, значит, $ATFC$ — трапеция. Так как $AT = CF$, то трапеция $ATFC$ является равнобедренной.

Докажем теорему, которая позволяет установить, что отрезок является средней линией трапеции.

Теорема 1 (признак средней линии трапеции). *Если отрезок параллелен одному из оснований трапеции, его концы лежат на боковых сторонах, а один из них есть середина стороны, то отрезок является средней линией трапеции.*

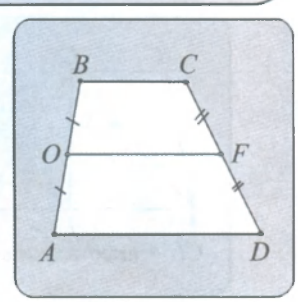
Дано:

$ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$,
$O \in AB$, $AO = OB$,
$OF \parallel AD$, $F \in CD$.

Доказать:

OF — средняя линия (рис. 8, *а*).

а



б

Рисунок 8

Доказательство.

1) Так как $OF \parallel AD$ и $AD \parallel BC$, то

$$OF \parallel BC.$$

2) Из того, что

$$AO = OB,\ OF \parallel AD$$

и

$$OF \parallel BC$$

по теореме Фалеса следует, что

$$CF = FD \text{ (рис. 8, } б\text{)}.$$

Таким образом, отрезок OF — средняя линия трапеции $ABCD$.

Теорема доказана.

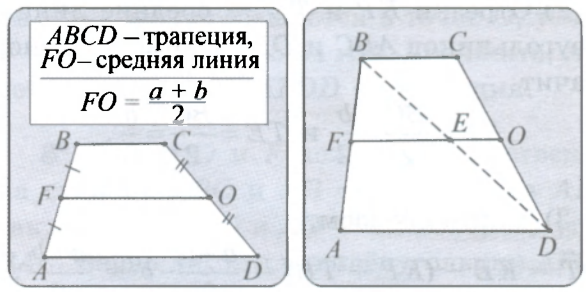
Теорема 2 (о свойствах средней линии трапеции). *Средняя линия трапеции параллельна основаниям, а её длина равна полусумме длин оснований.*

Дано:

$ABCD$ — трапеция,
$BC \parallel AD$, $AF = FB$, $DO = OC$,
$AD = a$, $BC = b$ (рис. 9, *а*).

Доказать:

$OF \parallel AD$, $FO = \dfrac{a+b}{2}$.



а *б*

Рисунок 9

Доказательство.

1) Пусть отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции $ABCD$, проходит через точку F и параллелен основанию AD. Тогда по признаку средней линии трапеции этот отрезок есть средняя линия трапеции $ABCD$, т. е. он совпадает с отрезком FO. Отсюда следует, что $FO \parallel AD$, $FO \parallel BC$.

2) Проведём диагональ BD трапеции $ABCD$ (рис. 9, *б*). Пусть

$$E = FO \cap BD.$$

3) В треугольнике ABD отрезок FE проходит через середину F стороны AB и параллелен AD, следовательно, по признаку средней линии треугольника FE — средняя линия треугольника ABD и $FE = \frac{1}{2}AD$.

4) В треугольнике BCD отрезок OE проходит через середину стороны CD и параллелен BC, значит, по признаку средней линии треугольника отрезок OE — средняя линия треугольника BCD и $OE — \frac{1}{2}BC$.

5) Таким образом,

$$FO = FE + EO = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(a + b).$$

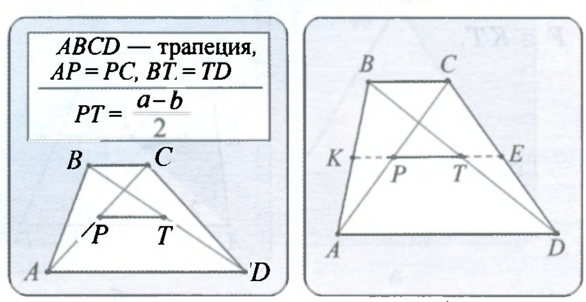
Теорема доказана.

Применяем теорию на практике

Задача 1. *Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, равна полуразности длин её оснований.*

Дано:

$ABCD$ — трапеция, $AP = PC$, $BT = TD$, $AD = a$, $BC = b$ (рис. 10, *а*).



а *б*

Рисунок 10

Доказать:

$$PT = \frac{a-b}{2}.$$

Доказательство.

1) Пусть точки K и E — точки пересечения прямой PT с боковыми сторонами AB и CD соответственно (рис. 10, *б*).

Средняя линия трапеции делит каждую диагональ пополам, а через две точки проходит единственная прямая, следовательно, отрезок KE — средняя линия.

2) Отрезки KP и TE — средние линии треугольников ABC и DBC соответственно, значит

$$KP = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2} \text{ и } TE = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}.$$

3) Таким образом,

$$PT = KE - (KP + TE) = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 2. *Докажите, что биссектрисы углов, прилежащих одной боковой стороне трапеции, взаимно перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежит средней линии трапеции.*

Дано:

$ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$),

KT — средняя линия,

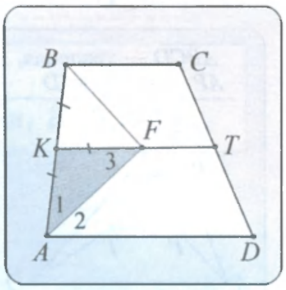
BF и AF — биссектрисы (рис. 11, *а*).

Доказать:

$\angle AFB = 90°$,

$F \in KT$.

а



б

Рисунок 11

Доказательство.

1) $\angle AFB = 90°$, так как биссектрисы BF и AF внутренних односторонних углов при параллельных прямых BC, AD и секущей AB пересекаются под прямым углом (рис. 11, *б*).

2) Медиана KF, проведённая к гипотенузе AB, равна половине гипотенузы, т. е. $KF = KA$ (рис. 11, *б*). Значит, треугольник AKF — равнобедренный и $\angle 1 = \angle 3$. Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 2 = \angle 3$, а значит, KF проходит через середину K стороны AB и параллельна AD. Средняя линия KT тоже проходит через середину стороны AB и параллельна AD. Через точку K можно провести единственную прямую, параллельную прямой AD, значит точка F принадлежит KT.

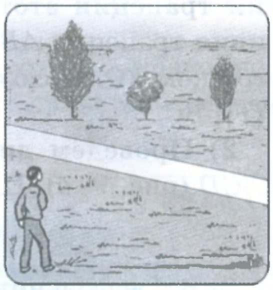
Что и требовалось доказать.

Задача 3. *Между двумя деревьями на одной с ними прямой и на одинаковом расстоянии от их оснований расположен куст шиповника. На каком расстоянии от дорожки находится куст шиповника, если деревья удалены от дорожки на расстояние 16 м и 28 м* (рис. 12, *а*).

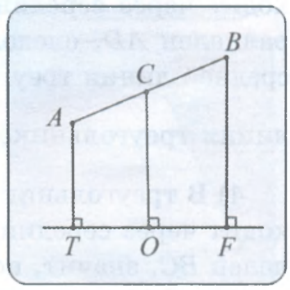
Решение.

Геометрической моделью, соответствующей условию задачи, служат прямая и перпендикулярные ей отрезки AT, BF и CO, длины которых соответствуют расстояниям от деревьев и куста шиповника до дорожки, при этом $AC = CB$ (рис. 12, *б*).

Пусть для определённости $AT = 16$ м, $BF = 28$ м. Для нахождения расстояния от куста шиповника до дорожки



а



б

Рисунок 12

необходимо вычислить длину отрезка CO. Так как отрезки AT, CO и BF — перпендикуляры к одной прямой, то $AT \parallel BF$ и $CO \parallel AT$. В четырёхугольнике $ABFT$ стороны AT и BF параллельны, а стороны AB и TF не параллельны, следовательно, $ABFT$ — трапеция. Точка C — середина стороны AB и $CO \parallel AT$, значит, по признаку средней линии трапеции CO — средняя линия. По теореме о средней линии трапеции

$$CO = \frac{AT + BF}{2} = \frac{16 + 28}{2} = 22 \text{ (м)}.$$

Таким образом, расстояние от куста шиповника до дорожки равно 22 м.

Ответ: 22 м.

Задачи

1°. На рисунке 13, *а* изображена трапеция $ABCD$, $BF \perp AD$, $F \in AD$. По данным рисунка вычислите градусные меры остальных углов трапеции и её высоту.

2°. $ABCD$ — трапеция, у которой диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, $\angle CAD = 20°$, $\angle ABC = 100°$. Вычислите градусные меры остальных углов трапеции.

3°. ACB — треугольник с прямым углом при вершине C, точки O и F — середины сторон AC и CB соответственно (рис. 13, *б*). Пользуясь данными рисунка, вычислите среднюю линию трапеции $AOFB$.

4°. Точки O и F — середины сторон BC и AC равностороннего треугольника ABC соответственно. Вычислите периметр трапеции $ABOF$, если $P_{ABC} = 12$ см.

5°. $ABCD$ — прямоугольная трапеция (рис. 13, *в*). По данным рисунка вычислите среднюю линию трапеции.

6°. Длина средней линии трапеции равна 27 см, а длина одного из оснований — 34 см. Вычислите длину другого основания трапеции.

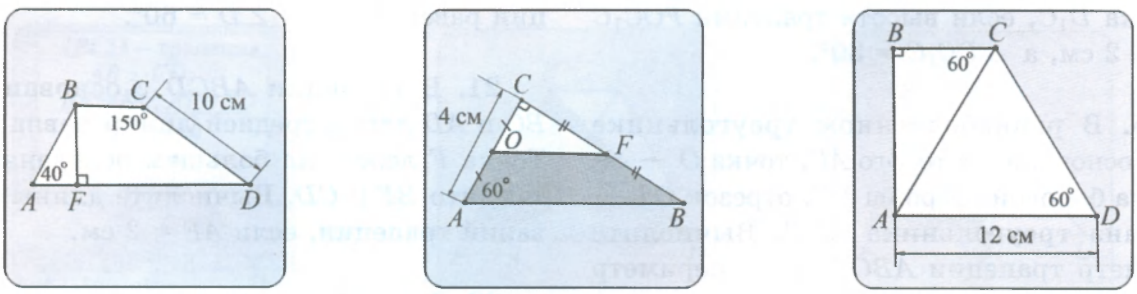
7°. $ABCD$ — параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O, точка F — середина стороны AB. Докажите, что четырёхугольник $AFOD$ — трапеция.

8°. Точки O и F лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC так, что $AF = FO$ и AO — биссектриса угла BAC. Верно ли, что четырёхугольник $AFOC$ является трапецией?

9°. Отрезки CT и AF — медианы, проведённые к боковым сторонам AB и BC треугольника ABC. Докажите, что четырёхугольник $ATFC$ — трапеция, и вычислите длину её средней линии, если $AC = 24$ см.

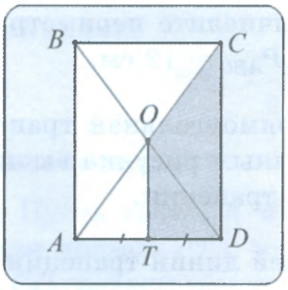
10°. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, точка F — середина стороны CD. Докажите, что четырёхугольник $AOFD$ — прямоугольная трапеция, и вычислите длину её средней линии, если $BD = 8$ см, $\angle ACD = 30°$.

11°. Длины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ равны 6 см и 10 см соответственно.

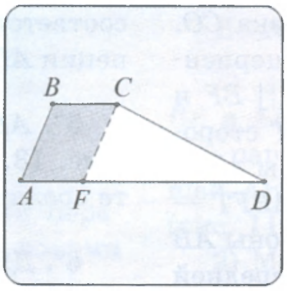


а *б* *в*

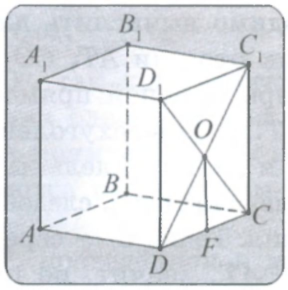
Рисунок 13



а



б



в

Рисунок 14

Точки F и O — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Вычислите длины отрезков, на которые диагональ BD делит отрезок FO.

12°. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, точка T — середина стороны AD (рис. 14, *а*). Докажите, что четырёхугольник $TOCD$ — прямоугольная трапеция, и найдите её высоту, если $AC = a$ и $\angle BCA = 60°$.

13. $ABCD$ — трапеция, боковые стороны которой AB и CD взаимно перпендикулярны, точка F лежит на основании AD так, что $AB \parallel CF$, $AB = 10$ см, $\angle BCD = 150°$, а длина средней линии трапеции равна 14 см (рис. 14, *б*). Вычислите периметр четырёхугольника $ABCF$.

14. Диагонали DC_1 и CD_1 грани DD_1C_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O, точка F — середина ребра DC (рис. 14, *в*). Докажите, что четырёхугольник FOC_1C, лежащий в грани DD_1C_1C, является прямоугольной трапецией, и вычислите длину отрезка D_1C, если высота трапеции FOC_1C равна 2 см, а $\angle DC_1C = 30°$.

15. В равнобедренном треугольнике ABC, основание которого AC, точка O — середина боковой стороны BC, отрезок OT — медиана треугольника AOC. Вычислите периметр трапеции $ABOT$, если периметр треугольника ABC равен 17 см, а длина боковой стороны на 1 см больше длины его основания.

16. Длина большего основания трапеции равна 10 см. Диагональ трапеции делит её среднюю линию на отрезки, длина одного из которых на 4 см больше длины другого. Вычислите длину меньшего основания трапеции.

17. Длина средней линии трапеции равна 20 см. Вычислите длины оснований трапеции, если они относятся как 1 : 3.

18. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны, $\angle BAD = 60°$, $AB = 5$ см. Вычислите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

19. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке F, $BF : FC = 2 : 3$. Длина стороны AB равна 12 см. Вычислите длину средней линии трапеции $AFCD$.

20. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла A. Вычислите длину стороны AB, если периметр трапеции равен 70 см и $\angle D = 60°$.

21. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD длина средней линии равна 9 см. Точка F лежит на большем основании AD так, что $BF \parallel CD$. Вычислите длины оснований трапеции, если $AF = 2$ см.

22. Градусные меры углов при большем основании трапеции равны 22° и 68°. Расстояние между серединами оснований трапеции равно 5 см, а длина меньшего основания — 7 см. Вычислите длину большего основания трапеции.

23. Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) является биссектрисой угла A, а длины стороны AB и средней линии равны 10 см и 17 см соответственно. Вычислите длины оснований трапеции.

24. Высота BF параллелограмма $ABCD$ делит сторону AD в отношении 3 : 1, считая от вершины D. Вычислите длину средней линии трапеции $BCDF$, если $AB = 20$ см, $\angle ADC = 120°$.

25*. Длины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ равны 12 см и 18 см соответственно, а градусные меры углов при большем основании равны 70° и 20°. Точки F и T — середины оснований трапеции. Вычислите длину отрезка FT.

26*. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны 19 см и 12 см соответственно, а длины боковых сторон AB и CD равны 10 см и 8 см соответственно. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O, а биссектрисы углов C и D — в точке F. Вычислите длину отрезка OF.

27. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, точка F — середина стороны BC. Вычислите расстояние между серединами отрезков AO и BF, если $\angle A = 60°$, а длина его меньшей диагонали равна 8 см.

28. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка F расположена на основании AD так, что отрезок BF параллелен стороне CD. Периметр треугольника, стороны которого являются средними линиями треугольника ABF, равен 20 см, а длина отрезка FD равна 10 см. Вычислите периметр трапеции.

29*. *Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, боковые стороны которой взаимно перпендикулярны, равна полуразности длин a и b большего и меньшего оснований (рис. 15, а).*

30. $ABCD$ — трапеция, отрезок BF параллелен диагонали AC, $AD = a$, $BC = b$, $AC = m$, $BD = n$, (рис. 15, *б*). Докажите, что периметр треугольника DBF равен сумме длин сторон и диагоналей трапеции: $P_{DBF} = a + b + m + n$.

31. Длина меньшего основания BC прямоугольной трапеции $ABCD$ равна 8 см. Вычислите длину средней линии трапеции, если угол ABC равен 120°, а вершина D лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB.

32. $ABCD$ — трапеция, отрезок BT параллелен стороне CD трапеции, $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$ (рис. 15, *в*). Докажите, что периметр треугольника ABT $P_{ABT} = c + d + a - b$.

33. Средняя линия трапеции делит её на две трапеции, длины средних линий

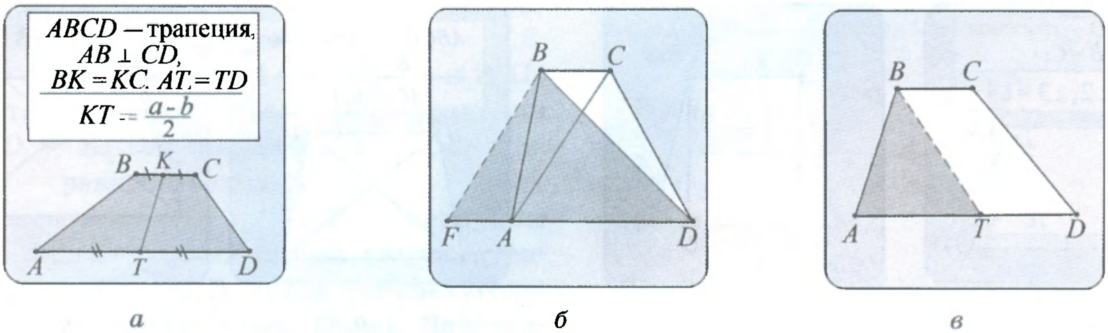


Рисунок 15

которых равны 5 см и 9 см. Вычислите длины оснований трапеции.

34. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Вычислите длину основания BC, если $\angle BAC = 30°$, $AD = 6$ см.

35*. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ противолежащие стороны AB и CD взаимно перпендикулярны. Точки O и F — середины сторон BC и AD соответственно, а точки T и L — середины диагоналей AC и BD соответственно. Найдите длину отрезка TL, если $OF = 8$ см.

36*. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. Точка F лежит на стороне BC так, что $\angle BFA = \angle CFD$.

Докажите, что

$$AF = 2DF.$$

Равнобедренная трапеция

Свойства равнобедренной трапеции

Докажем следующие свойства равнобедренной трапеции: *углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны*; *диагонали равнобедренной трапеции равны*.

Свойство 1 (о равенстве углов при основании равнобедренной трапеции). *Углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны.*

Дано:

$ABCD$ — трапеция,
$AB = CD$ (рис. 16, *а*).

Доказать:

$\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

Доказательство.

1) Пусть BF и CO — перпендикуляры, проведённые из вершин B и C к основанию AD (рис. 16, *б*). Тогда прямоугольные треугольники AFB и DOC равны по гипотенузе и катету ($AB = CD$, $BF = CO$).

2) Из равенства треугольников AFB и DOC следует, что $\angle 1 = \angle 2$.

3) Так как $\angle ABC = 180° - \angle 1$ и $\angle BCD = 180° - \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ABC = \angle DCB$.

Что и требовалось доказать.

Используя свойство 1, можно доказать, что диагонали равнобедренной трапеции равны.

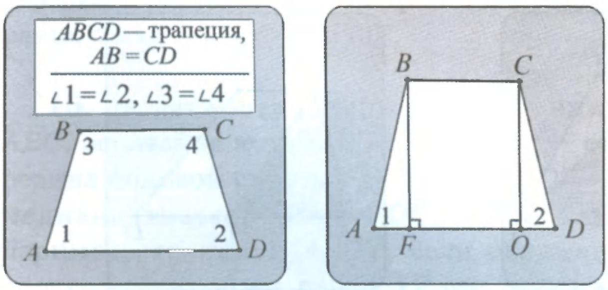
Свойство 2 (о равенстве диагоналей равнобедренной трапеции). *Диагонали равнобедренной трапеции равны.*

Дано:

$ABCD$ — трапеция,
$AB = CD$ (рис. 17, *а*).

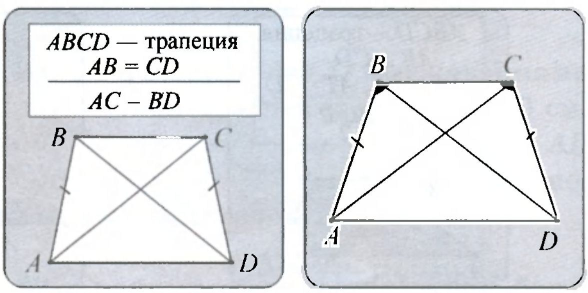
Доказать:

$AC = BD$.



а *б*

Рисунок 16



а *б*

Рисунок 17

Доказательство.

1) Проведём отрезок BF, параллельный боковой стороне CD (рис. 19, *б*).

2) $\angle 3 = \angle 2$ как соответственные углы при параллельных прямых BF, CD и секущей AD. Из равенств $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 2$ следует, что $\angle 1 = \angle 3$, т. е. треугольник ABF — равнобедренный и $AB = BF$.

3) Четырёхугольник $BFCD$ — параллелограмм, так как его противолежащие стороны попарно параллельны. Значит, $BF = CD$ как противолежащие стороны параллелограмма.

4) Из равенств $AB = BF$ и $BF = CD$ следует, что $AB = CD$, т. е. трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

Что и требовалось доказать.

Признак 2 (по равенству диагоналей). *Если диагонали трапеции равны, то трапеция — равнобедренная.*

Дано:

$ABCD$ — трапеция,
$AC = BD$ (рис. 20, *а*).

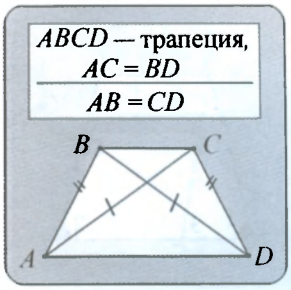
Доказать:

$AB = CD$.

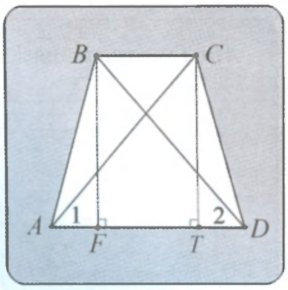
Доказательство.

1) Проведём высоты BF и CT трапеции (рис. 20, *б*).

2) $\Delta ATC = \Delta DFB$ по гипотенузе и катету ($AC = BD$, $BF = CT$), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.



а



б

Рисунок 20

3) $\Delta ABD = \Delta DCA$ по двум сторонам и углу между ними (AD — общая сторона, $AC = BD$, $\angle 1 = \angle 2$). Из равенства этих треугольников следует, что $AB = CD$.

Что и требовалось доказать.

Применяем теорию на практике

Задача 1. *Пусть $ABCD$ равнобедренная трапеция с основаниями $AD = a$ и $BC = b$, $AB = CD$, BF — высота трапеции. Докажите, что* $AF = \dfrac{a-b}{2}$, $DF = \dfrac{a+b}{2}$.

Дано:

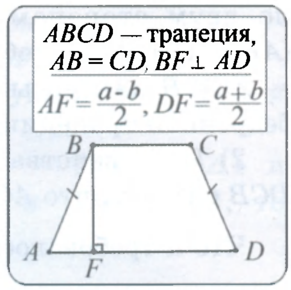
$ABCD$ — трапеция.

$AB = CD, AD = a$ и $BC = b$, $BF \perp AD$ (рис. 21, *а*).

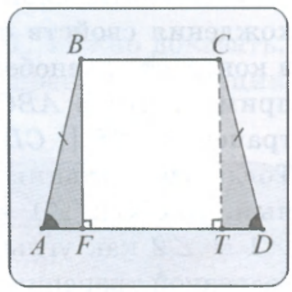
Доказать:

$AF = \dfrac{a-b}{2}$,

$DF = \dfrac{a+b}{2}$.



а



б

Рисунок 21

Доказательство.

1) Проведём высоту CT равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 21, *б*). Прямоугольные треугольники AFB и DTC равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$, $\angle BAF = \angle CDT$ как углы при основании равнобедренной трапеции).

2) Из равенства этих треугольников следует, что $AF = DT$. Так как $FT = BC$, то $AF = DT = \dfrac{a-b}{2}$. Таким образом,

$$DF = FT + DT = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

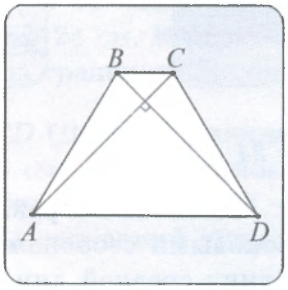
Задача 2. *В равнобедренной трапеции ABCD диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Вычислите высоту трапеции, если длины её оснований BC и AD равны 4 см и 20 см соответственно.*

Дано:

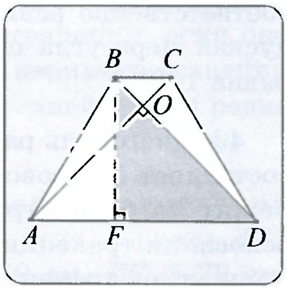
$ABCD$ — трапеция,
$AB = CD$,
$BC = 4$ см,
$AC \perp BD$,
$AD = 20$ см
(рис. 22, *а*).

Найти:

высоту трапеции.



а



б

Рисунок 22

Решение.

1) Пусть BF — высота трапеции $ABCD$ (рис 22, *б*).

2) Треугольник AOD прямоугольный ($\angle AOD = 90°$) и равнобедренный ($AO = OD$), следовательно, $\angle ODA = 45°$.

3) Треугольник BFD прямоугольный и $\angle BDF = 45°$, значит $BF = FD$.

4) Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, следовательно,

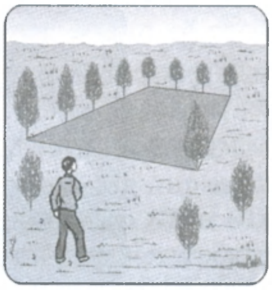
$$FD = \frac{BC + AD}{2} = \frac{4 + 20}{2} = 12 \text{ (см)}.$$

Таким образом, высота трапеции

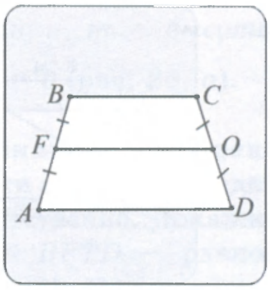
$$BF = FD = 12 \text{ см}.$$

Ответ: 12 см.

Задача 3. *В вершинах участка, имеющего форму равнобедренной трапеции, длина одного из оснований которой на 36 м больше длины каждой из остальных сторон, а средняя линия равна 42 м, высажены деревья (рис. 23, а). Сколько ещё нужно высадить деревьев вдоль сторон участка, чтобы расстояние между основаниями соседних деревьев равнялось 3 м?*



а



б

Рисунок 23

Решение.

Геометрической моделью участка является равнобедренная трапеция $ABCD$, у которой длина основания AD на 36 м больше длины каждой из сторон AB, BC и CD, а средняя линия $FO = 42$ м (рис. 23, *б*).

Пусть $AB = BC = CD = x$, тогда $AD = x + 36$. По свойству средней линии трапеции $42 = \frac{x+(x+36)}{2}$. Отсюда $x = 24$ м, $AD = 60$ м. Периметр участка равен $3x + AD = 3 \cdot 24 + 60 = 132$ (см). Таким образом, необходимое число деревьев для высадки $132 : 3 - 4 = 40$.

Ответ: 40 деревьев.

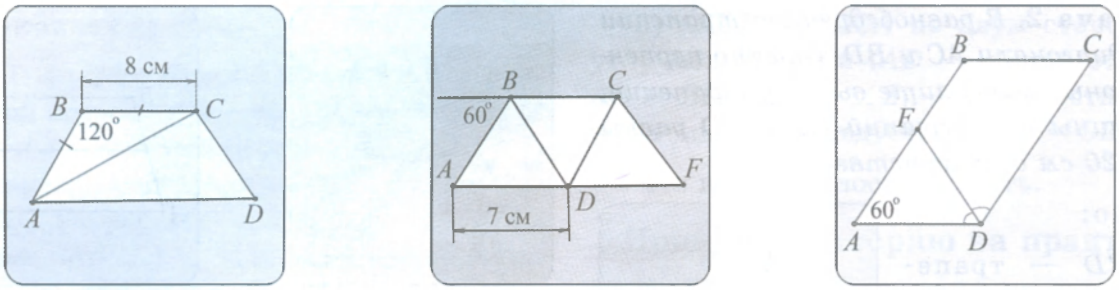
Задачи

37°. На рисунке 24, *а* изображена равнобедренная трапеция $ABCD$, у которой боковая сторона AB равна основанию BC. Пользуясь данными рисунка, найдите градусные меры углов BAD, CDA, BCD и длину основания AD.

38°. $ABCD$ ($BC \parallel AD$) — равнобедренная трапеция, у которой $AB = BC$, $\angle CAD = 34°$. Найдите градусные меры углов трапеции.

39°. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) делит угол A пополам и перпендикулярна боковой стороне CD. Вычислите длину основания BC, если $\angle B = 120°$, $AD = 42$ см.

40°. На рисунке 24, *б* изображён ромб $ABCD$, $CF \parallel BD$. По данным рисунка вычислите периметр трапеции $ABCF$.



а б в

Рисунок 24

41°. Точки F и T лежат на стороне BC прямоугольника $ABCD$ так, что AF и DT — биссектрисы углов A и D соответственно. Докажите, что точки F и T являются вершинами равнобедренной трапеции с основанием AD.

42°. $ABCD$ — параллелограмм, в котором $\angle A = 60°$, DF — биссектриса угла D (рис. 24, *в*). Докажите, что $DFBC$ — равнобедренная трапеция.

43. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O, $\angle OAD = \angle ODA$. Докажите, что трапеция равнобедренная.

44°. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) высота равна 6 см, $\angle BAD = 45°$, $BC = 8$ см. Вычислите длину средней линии трапеции.

45°. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина меньшего основания BC равна 10 см, $\angle BAC = 60°$. Точка F лежит на большем основании AD так, что $BF \parallel CD$, периметр треугольника ABF равен 18 см. Вычислите длину средней линии трапеции.

46°. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины, делит её большее основание на отрезки, длины которых равны 2 см и 10 см. Вычислите длину меньшего основания трапеции.

47. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB, $\angle ADB = \angle BDC = 30°$. Вычислите длину основания AD, если периметр трапеции равен 30 см.

48. $ABCD$ — равнобедренная трапеция с боковыми сторонами AB и CD. Вычислите длину средней линии трапеции, если длины большего основания и боковой стороны соответственно равны 14 см и 8 см, а градусная мера угла при меньшем основании равна 120°.

49. Диагональ равнобедренной трапеции составляет с боковой стороной угол 120° и лежит на биссектрисе угла при большем основании трапеции. Вычислите градусные меры углов трапеции.

50. В равнобедренной трапеции длина боковой стороны равна длине меньшего основания, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите градусные меры углов трапеции.

51. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, точка F лежит на основании AD так, что $CF \parallel AB$. Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон треугольника CFD, если $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AD = 9$ см.

52. В равнобедренной трапеции длины боковой стороны и средней линии равны соответственно 6 см и 7 см, а угол при основании 60°. Вычислите периметр трапеции.

53. В равнобедренной трапеции длина боковой стороны равна 8 см, а длины оснований равны 20 см и 28 см. Найдите градусные меры углов трапеции.

54. *Докажите, что если биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором основании, то длина* *второго основания равна сумме длин боковых сторон трапеции.*

55. Средняя линия равнобедренной трапеции делится диагональю на части, длины которых равны 8 см и 20 см, а длина её боковой стороны равна 24 см. Вычислите градусные меры углов трапеции.

56. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) длина средней линии равна 36 см. Точка F лежит на основании AD так, что $BF \parallel CD$ и $AF =$ 2 см. Вычислите длины оснований трапеции.

57. Вычислите длину меньшего основания равнобедренной трапеции, если оно равно боковой стороне, периметр трапеции равен 56 см, а длина средней линии равна 18 см.

58. В равнобедренной трапеции $ABCD$ градусная мера угла A равна 32°, $\angle ACD = 132°$. $AD = 40$ см, $BC = 20$ см. Вычислите периметр трапеции.

59. В равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, длина средней линии равна 12 см. Вычислите высоту трапеции.

60. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, её высота равна 6 см, а длина меньшего основания равна 2 см. Вычислите длину большего основания.

61. *Докажите, что высота равнобедренной трапеции $ABCD$, диагонали которой AC и BD взаимно перпендикулярны, равна её средней линии, т. е. высота* $h = \frac{a+b}{2}$. где $AD = a$, $BC = b$ (рис. 25, *а*).

62. $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, точки F и T — середины рёбер SB и SD соответственно. Докажите, что четырёхугольник $BFTD$ — равнобедренная трапеция (рис. 25, *б*).

63. *Докажите, что середины сторон O, F, T и L равнобедренной трапеции $ABCD$, диагонали которой AC и BD взаимно перпендикулярны, являются вершинами квадрата (рис. 25, в).*

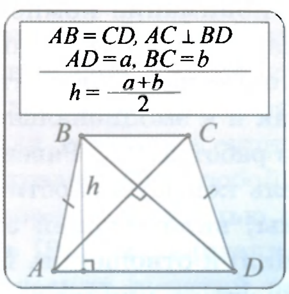
64. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны 30 см и 10 см, $\angle CDA = 60°$. Прямая, проходящая через вершину B и середину O стороны CD, пересекает прямую AD в точке F так, что $\angle ABF = 90°$, $\angle CBF = 30°$. Вычислите периметр трапеции.

65. В равнобедренной трапеции $ABCD$ градусная мера угла D равна 75°, высота трапеции равна её средней линии, O — точка пересечения диагоналей AC и BD, BO – 10 см. Вычислите длину боковой стороны трапеции.

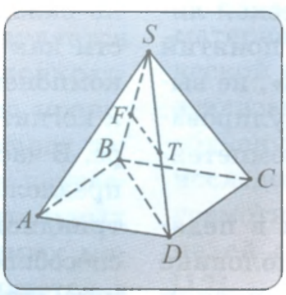
66. Постройте равнобедренную трапецию по острому углу α, диагонали a и высоте h.

67. Постройте трапецию по двум диагоналям d_1 и d_2, углу α между ними и боковой стороне a.

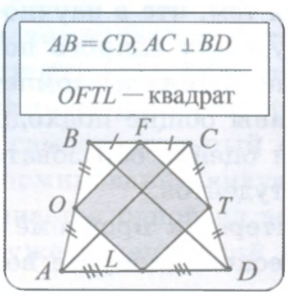
68. Постройте трапецию по четырём сторонам a, b, c, d.



а



б



в

Рисунок 25