УДК 530.1; 514.84

ОДНОМЕРНАЯ ОБОБЩЕННАЯ КУЛОНОВСКАЯ ЗАДАЧА

***А. Н. ЛАВРЁНОВ*[1], *И. А. ЛАВРЁНОВ*[2]**

[1]*Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка, ул. Советская, 18, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2]*Октонион технолоджи, ул. Янки Купалы, 25, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрена квантово-механическая кулоновская задача, усложненная в двух направлениях. Первое обобщение связано с переходом из евклидова пространства нулевой кривизны в одномерные геометрии Кэли – Клейна, а второе – с добавлением к кулоновскому потенциалу сингулярного члена $\frac{g}{x^2}$. Его можно рассматривать как потенциал Калоджеро – Сазерленда, который обычно используется для описания анионов, магнитных монополей, дионов и т. д. Помимо методологического аспекта, представленная задача будет полезна как частный случай так называемой модели с координатно-зависимой массой при описании наноструктур в квантовых точках или на плоскости, а также метаматериалов и астрономических объектов в сильных магнитных полях. На положительной координатной полуоси она превращается в обобщение модели с потенциалом Кратцера, который традиционно используется для описания молекулярной энергии и структуры, взаимодействий между различными молекулами и несвязанными атомами. С помощью метода факторизации найдены спектр энергии и волновые функции стационарных состояний, имеющие кривизну пространства в качестве параметра. Формула для уровней энергии содержит два слагаемых. Первое слагаемое дает спектр энергии обычной одномерной кулоновской задачи, а второе слагаемое в явном виде зависит от наличия кривизны и отвечает за спектр частицы на окружности $S_1(j)$. Константа

Образец цитирования:
Лаврёнов АН, Лаврёнов ИА. Одномерная обобщенная кулоновская задача. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2024;1:75–82.
EDN: YXMHHE

For citation:
Lavrenov AN, Lavrenov IA. One-dimensional generalised Coulomb problem. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2024;1:75–82. Russian.
EDN: YXMHHE

Авторы:
Александр Николаевич Лаврёнов – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики физико-математического факультета.
Иван Александрович Лаврёнов – ведущий специалист.

Authors:
Alexandre N. Lavrenov, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of informatics and methods of teaching informatics, faculty of physics and mathematics.
lanin0777@mail.ru
https://orcid.org/0001-7384-3621
Ivan A. Lavrenov, leading specialist.
lanin99@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-3650-8987

связи g, характеризующая потенциал Калоджеро – Сазерленда, входит в оба слагаемых нелинейно через величину β_0 ($g^2 = \beta_0(\beta_0 - 1)$), представляющую собой аддитивную поправку к порядковому номеру энергетического уровня. В частном случае чисто кулоновского поля полученные результаты совпадают с ранее опубликованными результатами.

Ключевые слова: обобщенная кулоновская задача; кривизна; пространство постоянной кривизны; геометрии Кэли – Клейна; метод факторизации; одномерное пространство.

ONE-DIMENSIONAL GENERALISED COULOMB PROBLEM

A. N. LAVRENOV [a], ***I. A. LAVRENOV*** [b]

[a] *Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, 18 Savieckaja Street, Minsk 220030, Belarus*
[b] *Octonion Technology, 25 Janki Kupaly Street, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: A. N. Lavrenov (lanin0777@mail.ru)

The quantum-mechanical Coulomb problem, complicated in two directions, is considered in this article. The first generalisation is associated with the transition from Euclidean space to one-dimensional Cayley – Klein geometries, and the second one is connected with the addition of a singular term $\frac{g}{x^2}$ to the Coulomb potential. It can be considered as a Calogero – Sutherland potential, which is used to describe anyons, magnetic monopoles, dyons, etc. In addition to the methodological aspect, the problem under consideration will also be useful as a special case of the so-called coordinate-dependent mass model when describing nanostructures in quantum dots or on a plane, metamaterials and astronomical objects in strong magnetic fields. On the positive coordinate semiaxis, it turns into a certain generalisation of the model with the Kratzer potential, which is used to describe molecular energy and structure, interactions between molecules and non-bounded atoms. Using the factorisation method, the energy spectrum and wave functions of stationary states are found, having the curvature of space as a parameter. The formula for energy levels contains two terms. The first term gives the energy spectrum of the one-dimensional Coulomb problem, and the second term explicitly depends on the presence of curvature and is responsible for the spectrum of the particle on the circle $S_1(j)$. The coupling constant g of Calogero – Sutherland potential is non-linearly contained in both terms through a variable β_0 ($g^2 = \beta_0(\beta_0 - 1)$) representing an additive correction to the number of the energy level. In the special case of a purely Coulomb field, the results obtained coincide with the results published earlier.

Keywords: generalised Coulomb problem; curvature; space of constant curvature; Cayley – Klein geometries; factorisation method; one-dimensional space.

Введение

Поиск точно решаемых моделей – одна из наиболее актуальных задач в области теоретической физики, однако получение точных решений возможно не во всех случаях, представляющих исследовательский интерес. Для этой цели часто используют метод факторизации [1], сводящий динамическое уравнение исходной системы к простому уравнению, с которым легче работать.

В рамках нерелятивистской квантовой механики уравнение Шрёдингера точно описывает динамику замкнутой квантовой системы, обеспечивая всю информацию о ее свойствах. В этом контексте приведем только два ярких примера точно решаемых моделей – модель гармонического осциллятора и кулоновскую задачу. Они имеют ряд физических приложений и компонент концепции скрытой (динамической) симметрии. Для проблемы Кеплера существуют различные обобщения. Помимо очевидного поиска многомерных аналогов, в работах [2; 3] кулоновский центр системы был заменен дираковским дионом (электрически заряженным монополем Дирака) с добавлением к кулоновскому потенциалу специфического центробежного и сингулярного члена $\frac{g}{x^2}$. Согласно статье [4] подобные системы естественным образом возникают в гранулированной квантовой материи.

При переходе в уравнении Шрёдингера в искривленное пространство получаем возможность изучения топологических дефектов, в частности, в рамках гравитации (космические струны, доменные границы и др.) [5] и физики конденсированного состояния (дислокации, вихри в сверхпроводниках и т. д.) [6; 7].

Недавний прогресс в области нанотехнологий и исследований материалов сделал (квази)одномерные системы важной частью современной физики [8]. Помимо методологического аспекта (как нулевое приближение для целого ряда двумерных и трехмерных задач, например, с потенциалом Кратцера для описания молекулярной энергии и структуры, взаимодействий между различными молекулами и несвязанными атомами), они представляют большой интерес для ученых в связи с постоянно растущим количеством физических приложений, включая «кулоновское» взаимодействие при описании наноструктур в квантовых точках или на плоскости, а также метаматериалов и астрономических объектов в сильных магнитных полях [9–13].

Таким образом, целью настоящей работы является решение обобщенной кулоновской задачи (ОКЗ) сразу для трех одномерных геометрий Кэли – Клейна $S_1(j)$ с помощью метода факторизации, который не был до конца реализован в статье [14]. Здесь ОКЗ понимается как квантово-механическая задача с потенциалом, представляющим собой сумму кулоновского потенциала и потенциала Калоджеро – Сазерленда. С учетом поиска ее решения только в одномерном пространстве разной топологии далее будем использовать термин «одномерная ОКЗ» (ООКЗ).

В работах [15; 16] был предложен другой, универсальный, подход к точно решаемым задачам на пространствах постоянной кривизны, но начиная с двумерного случая. Для полноты библиографического описания текущего состояния анализируемой проблемы отметим еще только работы [17–19], где на S_1 и H_1 кулоновская задача в явном виде решена аналитическим способом.

Далее подчеркнем, что в историческом аспекте по данной тематике обычно принято вначале вспоминать работы Э. Шрёдингера 1940 г. [20] и Л. Инфельда с А. Шильдом 1945 г. [21], а затем работы П. У. Хиггса 1979 г. [22]. Они рассмотрели атом водорода в трехмерном пространстве постоянной положительной и отрицательной кривизны, а также скрытую симметрию для кулоновской и осцилляторной задач в пространстве постоянной кривизны произвольной размерности $N > 2$ соответственно. В последнем случае автор нашел аналоги вектора Рунге – Ленца (кулоновский потенциал) и тензора Фрадкина (потенциал гармонического осциллятора) плоского пространства. Следует отметить, что в 1979 г. были опубликованы работы и других авторов по данной тематике [23; 24].

Модель ООКЗ в геометриях Кэли – Клейна

Для удобства сравнения полученных результатов и с учетом статьи [14] будем рассматривать сразу три одномерные геометрии Кэли – Клейна $S_1(j)$, которые реализуются на полуокружности

$$S_1(j) = \left\{u_0^2 + j^2 u_1^2 = R^2,\ u_0 > 0\right\},$$

где $j = 1, \iota, i$, а ι есть нильпотентная единица такая, что $\iota \neq 0$, но $\iota^2 = 0$. Значение $j = 1$ соответствует эллиптической геометрии $S_1(1) \equiv S_1$ на прямой с постоянной положительной кривизной, при $j = i$ имеем гиперболическую прямую $S_1(i) \equiv H_1$ с постоянной отрицательной кривизной, а в пределе $R \to \infty$ или при $j = \iota$ получаем обычную евклидову прямую $S_1(\iota) \equiv E_1$ с нулевой кривизной.

Исходя из результатов работы [14], при вводе безразмерных величин

$$\xi = \alpha x,\ \rho = \alpha R,\ Q^2 = \alpha q^2,\ \alpha = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}$$

будем иметь следующий вид оператора Шрёдингера для кулоновского потенциала, дополненного сингулярным членом $\dfrac{g}{x^2}$ на $S_1(j)$:

$$H(\xi;\, j) = \frac{\hbar\omega}{2}\left[-\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}\left(1 + j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi} - \frac{Q^2}{|\xi|} + \frac{g}{\xi^2}\right]. \tag{1}$$

Для нахождения его собственных значений используем метод факторизации. С этой целью выразим оператор (1) через оператор рождения $a^+(j)$ и оператор уничтожения $a^-(j)$:

$$H(\xi;\, j) = \frac{\hbar\omega}{2}\left[2a^+(j)a^-(j) + \lambda\right], \tag{2}$$

где

$$a^{+}(j)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}+\gamma(j)-\frac{\beta(j)}{\xi}\right),$$
$$a^{-}(j)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}+\gamma(j)-\frac{\beta(j)}{\xi}\right). \tag{3}$$

Подстановка формул (3) в выражение (2) и сравнение с оператором (1) дает следующие условия на g, β и λ:

$$g^2=\beta(j)(\beta(j)-1),\ 2\beta\gamma=Q^2\operatorname{sgn}(y),\ \lambda(j)=-\gamma^2(j)+\beta(j)\frac{j^2}{\rho^2}.$$

Основное состояние в рассматриваемой задаче для модели ООКЗ найдем из условия

$$a^{-}(j)\Psi_0(\xi;j)=0,$$

т. е.

$$\left(\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}+\gamma-\frac{\beta}{\xi}\right)\Psi_0(\xi;j)=0. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) имеет следующий вид:

$$\Psi_0(\xi;j)=C_0(j)\xi^{\beta(j)}\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{\beta(j)}{2}}\exp\left[-\frac{\gamma\rho}{j}\operatorname{arctg}\left(\frac{j}{\rho}\xi\right)\right]. \tag{5}$$

При учете сшивания решений уравнения (5) на положительной и отрицательной областях числовой оси получим четные и нечетные решения, что в чисто кулоновском поле приводит к двукратной вырожденности уровней энергии.

Далее строим цепочку операторов Шрёдингера

$$H_{n+1}(j)=\frac{\hbar\omega}{2}\left[2a_n^{-}(j)a_n^{+}(j)+\lambda_n(j)\right]=\frac{\hbar\omega}{2}\left[2a_{n+1}^{+}(j)a_{n+1}^{-}(j)+\lambda_{n+1}(j)\right], \tag{6}$$

где операторы рождения и уничтожения выражаются следующим образом:

$$a_n^{+}(j)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}+\gamma_n(j)-\frac{\beta_n(j)}{\xi}\right),$$

$$a_n^{-}(j)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}+\gamma_n(j)-\frac{\beta_n(j)}{\xi}\right).$$

Их произведения имеют вид

$$2a_n^{-}(j)a_n^{+}(j)=\left[-\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\left[\frac{d}{d\xi}\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}-\frac{\beta_n(j)}{\xi^2}\right]+\left(\gamma_n(j)-\frac{\beta_n(j)}{\xi}\right)^2\right],$$

$$2a_{n+1}^{+}(j)a_{n+1}^{-}(j)=\left[-\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\left[\frac{d}{d\xi}\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}+\frac{\beta_{n+1}(j)}{\xi^2}\right]+\left(\gamma_{n+1}(j)\xi-\frac{\beta_{n+1}(j)}{\xi}\right)^2\right].$$

Из цепочки операторов Шрёдингера (6) получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\left[\beta_{n-1}(j)+\beta_n(j)\right]\left[\beta_n(j)-\beta_{n-1}(j)-1\right]=0,\\ \gamma_n(j)=\dfrac{\beta_{n-1}(j)}{\beta_n(j)}\gamma_{n-1}(j),\\ \lambda_n-\lambda_{n-1}=\gamma_{n-1}^2(j)-\gamma_n^2(j)+\dfrac{j^2}{\rho^2}\left[\beta_{n-1}(j)+\beta_n(j)\right].\end{cases}$$

Ее решения представляются следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_n(j) = \beta_0(j) + n, \\ \gamma_n(j) = \dfrac{\beta_0(j)}{\beta_0(j) + n}\gamma_0(j), \\ \lambda_n = \lambda_0 + \gamma_0^2(j) - \dfrac{\beta_0^2(j)\gamma_0^2(j)}{\left(\beta_0(j) + n\right)^2} + \dfrac{j^2}{\rho^2}\left[\left(\beta_0(j) + n\right)^2 - \beta_0^2(j)\right], \end{cases}$$

где нулевые параметры определяются формулами

$$g^2 = \beta_0(\beta_0 - 1),\ 4\beta_0^2(j)\gamma_0^2(j) = Q^4,\ \lambda_0 = -\gamma_0^2 + \beta_0\frac{j^2}{\rho^2}.$$

Таким образом, имеем следующую унифицированную формулу для уровней энергии $E_n(j) = \frac{\hbar\omega}{2}\lambda_n(j)$ модели ООКЗ на геометриях Кэли – Клейна $S_1(j)$ в размерных величинах:

$$E_n(j) = -\frac{mq^4}{2\hbar^2(\beta_0 + n)^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{j^2}{R^2}\left[(\beta_0 + n)^2 - \beta_0(\beta_0 - 1)\right].$$

Здесь при $\beta_0 = 1$ воспроизводим результат работы [14], следовательно, первое слагаемое дает спектр энергии обычной одномерной кулоновской задачи, а второе слагаемое в явном виде зависит от наличия кривизны и отвечает за спектр частицы на окружности $S_1(j)$.

Предполагая увеличение уровней энергии с ростом n ($E = E_0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_n$), получаем условие

$$E_n - E_{n-1} = (2\beta_0 + 2n + 1)\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{j^2}{R^2} + \frac{mQ^4}{2\hbar^2(\beta_0 + n + 1)^2(\beta_0 + n)^2}\right\} > 0.$$

Оно дает ограниченность дискретного энергетического спектра на гиперболической прямой, где $j = i$. Таким образом, на гиперболической прямой максимальное число ($n_{\max}$) дискретных уровней будет определяться целочисленными значениями неравенства

$$2n_{\max} < -1 - 2\beta_0 + \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega^2R^4}{\hbar^2}}.$$

Единственное связное состояние получим при $mRq^2 = \beta_0(\beta_0 + 1)\hbar^2$ с энергией

$$E_0 = -\frac{q^2\left(\beta_0^2 + 2\beta_0 + 2\right)}{2R\beta_0(\beta_0 + 1)} \equiv -\frac{mq^4\left(\beta_0^2 + 2\beta_0 + 2\right)}{2\hbar^2\beta_0^2(\beta_0 + 1)^2}.$$

Другими словами, энергетический спектр для модели ООКЗ будет различным в зависимости от наличия кривизны.

Из цепочки операторов Шрёдингера (6) следуют сплетающие соотношения для операторов H_n

$$a_n^-(j)H_n(j) = H_{n+1}(j)a_n^-(j),$$

$$H_n(j)a_n^+(j) = a_n^+(j)H_{n+1}(j).$$

Учитывая их, для собственной функции гамильтониана $H\Psi_n(\xi; j) = E_n(\xi; j)\Psi_n(\xi; j)$ легко получим

$$\Psi_n(\xi; j) = a_0^+(j)a_1^+(j)\cdots a_{n-2}^+(j)a_{n-1}^+(j)\Psi_0^{(n)}(\xi; j).$$

Здесь волновая функция $\Psi_0^{(n)}(\xi; j)$ является собственной функцией гамильтониана $H_n(\xi; j)\Psi_0^{(n)}(\xi; j) = E_n(\xi; j)\Psi_0^{(n)}(\xi; j)$ и находится из условия

$$a_n^-(j)\Psi_0^{(n)}(\xi; j) = 0,$$

т. е.

$$\left(\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\xi}+\gamma_n-\frac{\beta_n}{\xi}\right)\Psi_0^{(n)}(\xi;j)=0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) имеет следующий вид:

$$\Psi_0^{(n)}(\xi;j)=C_0^{(n)}(j)\xi^{\beta_n(j)}\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{\beta_n(j)}{2}}\exp\left[-\frac{\gamma_n(j)\rho}{j}\operatorname{arctg}\left(\frac{j}{\rho}\xi\right)\right].$$

В частности, для первого возбужденного уровня $n = 1$ получим

$$\Psi_1(\xi;j)=a_0^+(j)\Psi_0^{(1)}(\xi;j)=a_0^+(j)\xi^{\gamma_1(j)}\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{\gamma_1(j)}{2}-\beta_1(j)\frac{\rho^2}{j^2}}$$

или

$$\Psi_1(\xi;j)=C_1(j)\left(\xi\left[2\beta_0+\frac{j^2}{\rho^2}\right]-\frac{[2\gamma_0+1]}{\xi}\right)\xi^{\gamma_1(j)}\left(1+j^2\frac{\xi^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{\gamma_1(j)}{2}-\beta_1(j)\frac{\rho^2}{j^2}}.$$

Действуя аналогичным образом, можно найти волновые функции других возбужденных состояний.

Заключение

В статье рассмотрена квантово-механическая задача в одномерной геометрии Кэли – Клейна с результирующим потенциалом, представляющим собой сумму кулоновского потенциала и потенциала Калоджеро – Сазерленда в виде сингулярного члена $\frac{g}{x^2}$. Последний часто используется для теоретического описания анионов, магнитных монополей, дионов и т. д.

В методологическом плане предложенная задача является частным случаем так называемой модели с координатно-зависимой массой и может быть полезна при описании наноструктур в квантовых точках или на плоскости, метаматериалов и астрономических объектов в сильных магнитных полях, а также (на положительной координатной полуоси) для описания молекулярной энергии и структуры, взаимодействий между различными молекулами и несвязанными атомами.

Метод факторизации позволил найти энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний рассматриваемой задачи. Полученная формула для уровней энергии имеет аддитивный вклад как от спектра энергии обычной одномерной кулоновской задачи, так и от спектра частицы на окружности $S_1(j)$ с явной зависимостью от кривизны. Также имеется аддитивная поправка к порядковому номеру энергетического уровня в виде величины β_0, которая через соотношение $g^2=\beta_0(\beta_0-1)$ определяет влияние константы связи g от потенциала Калоджеро – Сазерленда на искомый результат. Воспроизводятся ранее опубликованные результаты для чисто кулоновского поля.

Кратко обсудим дальнейшие возможные направления исследований для обобщения полученных результатов. Первое направление достаточно очевидно. Оно предполагает рассмотрение проблемы при увеличении размерности N операторного пространства или при любом ее значении. Второе направление можно связать с так называемой моделью Данкля – Кулона, где вместо обычной производной вводится производная Данкля, содержащая оператор отражения от соответствующей гиперплоскости.

Библиографические ссылки

1. Dong S-H. *Factorization method in quantum mechanics.* Dordrecht: Springer; 2007. XIX, 297 p. (Fundamental theories of physics; volume 150). DOI: 10.1007/978-1-4020-5796-0.

2. Zwanziger D. Exactly soluble nonrelativistic model of particles with both electric and magnetic charges. *Physical Review.* 1968; 176(5):1480–1488. DOI: 10.1103/PhysRev.176.1480.

3. McIntosh HV, Cisneros A. Degeneracy in the presence of a magnetic monopole. *Journal of Mathematical Physics.* 1970;11(3): 896–916. DOI: 10.1063/1.1665227.

4. Trugenberger CA. Magnetic monopoles, dyons and confinement in quantum matter. *Condensed Matter.* 2023;8(1):2. DOI: 10.3390/condmat8010002.

5. Bulygin II, Sazhin MV, Sazhina OS. Theory of gravitational lensing on a curved cosmic string. *The European Physical Journal C.* 2023;83:844. DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-11994-x.

6. Борисов АБ, Киселев ВВ. *Двумерные и трехмерные топологические дефекты, солитоны и текстуры в магнетиках.* Москва: Физматлит; 2022. 455 с.

7. Клумов БА. Универсальные структурные свойства трехмерных и двумерных расплавов. *Успехи физических наук.* 2023;193(3):305–330. DOI: 10.3367/UFNr.2022.09.039237.

8. Giamarchi T. One-dimensional physics in the 21st century. *Comptes Rendus Physique.* 2016;17(3–4):322–331. DOI: 10.1016/j.crhy.2015.11.009.

9. Mustafa O. Confined Klein – Gordon oscillators in Minkowski spacetime and a pseudo-Minkowski spacetime with a space-like dislocation: PDM KG-oscillators, isospectrality and invariance. *Annals of Physics.* 2022;446:169124. DOI: 10.1016/j.aop.2022.169124.

10. Pont FM, Osenda O, Serra P. Quasi-exact solvability and entropies of the one-dimensional regularised Calogero model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2018;51(19):195303. DOI: 10.1088/1751-8121/aab85e.

11. Hartmann RR, Portnoi ME. Pair states in one-dimensional Dirac systems. *Physical Review A.* 2017;95(6):062110. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.062110.

12. Yao H, Pizzino L, Giamarchi T. Strongly-interacting bosons at 2D–1D dimensional crossover. *SciPost Physics.* 2023;15(2):050. DOI: 10.21468/SciPostPhys.15.2.050.

13. Cai Zhigang, Wang Yi-Xiang. Magnetic field driven Lifshitz transition and one-dimensional Weyl nodes in three-dimensional pentatellurides. *Physical Review B.* 2023;108(15):155202. DOI: 10.1103/PhysRevB.108.155202.

14. Громов НА, Куратов ВВ. Квантовая механика на одномерных геометриях Кэли – Клейна. *Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук.* 2017;2:5–11.

15. Cariñena JF, Rañada MF, Santander M. The quantum free particle on spherical and hyperbolic spaces: a curvature dependent approach. *Journal of Mathematical Physics.* 2011;52(7):072104. DOI: 10.1063/1.3610674.

16. Cariñena JF, Rañada MF, Santander M. Central potentials on spaces of constant curvature: the Kepler problem on the two-dimensional sphere S^2 and the hyperbolic plane H^2. *Journal of Mathematical Physics.* 2005;46(5):052702. DOI: 10.1063/1.1893214.

17. Мардоян ЛГ, Погосян ГС, Сисакян АН. Кулоновская задача на одномерном пространстве постоянной положительной кривизны. *Теоретическая и математическая физика.* 2003;135(3):427–433. DOI: 10.4213/tmf198.

18. Burdík Č, Pogosyan GS. Two exactly-solvable problems in one-dimensional hyperbolic space. In: Doebner H-D, Dobrev VK, editors. *Lie theory and its applications in physics V. Proceedings of the Fifth International workshop; 2003 June 16–22; Varna, Bulgaria.* Singapore: World Scientific; 2004. p. 294–300. DOI: 10.1142/9789812702562_0018.

19. Nersessian A, Pogosyan G. Relation of the oscillator and Coulomb systems on spheres and pseudospheres. *Physical Review A.* 2001;63(2):020103(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.63.020103.

20. Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A, Mathematical and Physical Sciences.* 1940;46:9–16.

21. Infeld L, Schild A. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature. *Physical Review.* 1945;67(3–4):121–122. DOI: 10.1103/PhysRev.67.121.

22. Higgs PW. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1979;12(3):309–323. DOI: 10.1088/0305-4470/12/3/006.

23. Курочкин ЮА, Отчик ВС. Аналог вектора Рунге – Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере. *Доклады Академии наук Белорусской ССР.* 1979;23(11):987–990.

24. Богуш АА, Курочкин ЮА, Отчик ВС. О квантово-механической задаче Кеплера в трехмерном пространстве Лобачевского. *Доклады Академии наук Белорусской ССР.* 1980;24(1):19–22.

References

1. Dong S-H. *Factorization method in quantum mechanics.* Dordrecht: Springer; 2007. XIX, 297 p. (Fundamental theories of physics; volume 150). DOI: 10.1007/978-1-4020-5796-0.

2. Zwanziger D. Exactly soluble nonrelativistic model of particles with both electric and magnetic charges. *Physical Review.* 1968;176(5):1480–1488. DOI: 10.1103/PhysRev.176.1480.

3. McIntosh HV, Cisneros A. Degeneracy in the presence of a magnetic monopole. *Journal of Mathematical Physics.* 1970;11(3):896–916. DOI: 10.1063/1.1665227.

4. Trugenberger CA. Magnetic monopoles, dyons and confinement in quantum matter. *Condensed Matter.* 2023;8(1):2. DOI: 10.3390/condmat8010002.

5. Bulygin II, Sazhin MV, Sazhina OS. Theory of gravitational lensing on a curved cosmic string. *The European Physical Journal C.* 2023;83:844. DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-11994-x.

6. Borisov AB, Kiselev VV. *Dvumernye i trekhmernye topologicheskie defekty, solitony i tekstury v magnetikakh* [Two-dimensional and three-dimensional topological defects, solitons and textures in magnets]. Moscow: Fizmatlit; 2022. 455 p. Russian.

7. Klumov BA. Universal structural properties of three-dimensional and two-dimensional melts. *Uspekhi fizicheskikh nauk.* 2023;193(3):305–330. Russian. DOI: 10.3367/UFNr.2022.09.039237.

8. Giamarchi T. One-dimensional physics in the 21st century. *Comptes Rendus Physique.* 2016;17(3–4):322–331. DOI: 10.1016/j.crhy.2015.11.009.

9. Mustafa O. Confined Klein – Gordon oscillators in Minkowski spacetime and a pseudo-Minkowski spacetime with a space-like dislocation: PDM KG-oscillators, isospectrality and invariance. *Annals of Physics.* 2022;446:169124. DOI: 10.1016/j.aop.2022.169124.

10. Pont FM, Osenda O, Serra P. Quasi-exact solvability and entropies of the one-dimensional regularised Calogero model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2018;51(19):195303. DOI: 10.1088/1751-8121/aab85e.

11. Hartmann RR, Portnoi ME. Pair states in one-dimensional Dirac systems. *Physical Review A.* 2017;95(6):062110. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.062110.

12. Yao H, Pizzino L, Giamarchi T. Strongly-interacting bosons at 2D–1D dimensional crossover. *SciPost Physics.* 2023;15(2):050. DOI: 10.21468/SciPostPhys.15.2.050.

13. Cai Zhigang, Wang Yi-Xiang. Magnetic field driven Lifshitz transition and one-dimensional Weyl nodes in three-dimensional pentatellurides. *Physical Review B.* 2023;108(15):155202. DOI: 10.1103/PhysRevB.108.155202.

14. Gromov NA, Kuratov VV. Quantum mechanics on one-dimensional Cayley – Klein geometries. *Proceedings of the Komi Science Centre, Ural Branch, Russian Academy of Sciences.* 2017;2:5–11. Russian.

15. Cariñena JF, Rañada MF, Santander M. The quantum free particle on spherical and hyperbolic spaces: a curvature dependent approach. *Journal of Mathematical Physics.* 2011;52(7):072104. DOI: 10.1063/1.3610674.

16. Cariñena JF, Rañada MF, Santander M. Central potentials on spaces of constant curvature: the Kepler problem on the two-dimensional sphere S^2 and the hyperbolic plane H^2. *Journal of Mathematical Physics.* 2005;46(5):052702. DOI: 10.1063/1.1893214.

17. Mardoyan LG, Pogosyan GS, Sissakian AN. [Coulomb problem in a one-dimensional space with constant positive curvature]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika.* 2003;135(3):427–433. Russian. DOI: 10.4213/tmf198.

18. Burdík Č, Pogosyan GS. Two exactly-solvable problems in one-dimensional hyperbolic space. In: Doebner H-D, Dobrev VK, editors. *Lie theory and its applications in physics V. Proceedings of the Fifth International workshop; 2003 June 16–22; Varna, Bulgaria.* Singapore: World Scientific; 2004. p. 294–300. DOI: 10.1142/9789812702562_0018.

19. Nersessian A, Pogosyan G. Relation of the oscillator and Coulomb systems on spheres and pseudospheres. *Physical Review A.* 2001;63(2):020103(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.63.020103.

20. Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A, Mathematical and Physical Sciences.* 1940;46:9–16.

21. Infeld L, Schild A. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature. *Physical Review.* 1945;67(3–4): 121–122. DOI: 10.1103/PhysRev.67.121.

22. Higgs PW. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1979;12(3): 309–323. DOI: 10.1088/0305-4470/12/3/006.

23. Kurochkin YuA, Otchik VS. [Analog of the Runge – Lenz vector and energy spectrum in the Kepler problem on a three-dimensional sphere]. *Doklady Akademii nauk Belorusskoi SSR.* 1979;23(11):987–990. Russian.

24. Bogush AA, Kurochkin YuA, Otchik VS. [The quantum-mechanical Kepler problem in three-dimensional Lobachevsky space]. *Doklady Akademii nauk Belorusskoi SSR.* 1980;24(1):19–22. Russian.

Получена 03.11.2023 / исправлена 27.11.2023 / принята 29.11.2023.
Received 03.11.2023 / revised 27.11.2023 / accepted 29.11.2023.