

4. Токарева, Л. И. Теоретические основы формирования фундаментальных понятий и их систем в современном обучении / Л. И. Токарева // Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование. – 2009. – С. 25–34.

5. Информатика : учеб. пособие для 9-го кл. / Котов В. М., Лапо А. И., Быкадоров Ю. А., Войтехович Е. Н. – Минск : Народная асвета, – 2019. – 168 с.

УДК 372.851

Э. В. Шалик

E. Shalik

*УО «Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка» (Минск, Беларусь)*

ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ В УСЛОВИЯХ УНИФИКАЦИИ СОДЕРЖАНИЯ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

FEATURES OF THE ORGANIZATION OF THE STUDY OF THE CONCEPTS OF DERIVATIVE AND DIFFERENTIABLE FUNCTION IN THE CONDITIONS OF UNIFICATION OF THE CONTENT OF THE ACADEMIC SUBJECT «MATHEMATICAL ANALYSIS»

Описывается методика формирования понятия производной и дифференцируемой функции у студентов, в том числе при самостоятельном изучении материала, с указанием требований к усвоению сути содержания основных вопросов по теме.

The method of formation of the concept of a derivative and differentiable function among students is described, including when studying the material independently, indicating the requirements for mastering the essence of the content of the main questions on the topic.

Ключевые слова: математический анализ, функция, производная, дифференцируемость, односторонние производные, методика изучения.

Keywords: mathematical analysis, function, derivative, differentiability, one-sided derivatives, methods of study.

С 2023 г. в БГПУ стартовал процесс подготовки специалистов по новым учебным планам для специальности «Физико-математическое образование», согласно которым содержание учебной дисциплины «Математический анализ» унифицировано для трёх предметных областей: «Математика и информатика», «Физика и информатика», «Математика и физика». С этим связано существенное уменьшение количества часов на изучение классических разделов математического анализа (с 168 до 108 часов в семестр), усечение части учебного содержания (например, исключен раздел «Основные структуры математического анализа»). Переструктурирование учебного содержания необходимо для того, чтобы на начальном этапе изучения математического анализа все студенты получили базовую подготовку и могли далее использовать полученные знания в различных предметных областях, а также углублять эти знания в рамках изучения специальных дисциплин для «математиков».

Понятие производной функции одной действительной переменной является основным понятием теории дифференциального исчисления и его появление вызвано необходимостью решения ряда задач естествознания. Дальнейшее расширение этого понятия на действительные функции многих переменных, единство подходов к доказательству свойств и теорем курса дифференциального исчисления требуют детального изучения производной и понятия дифференцируемой функции в вузе, что будет способствовать повышению уровня профессиональных компетенций будущих учителей математики средних школ.

В учебной программе учреждения высшего образования для специальности Физико-математическое образование (математика и информатика и математика и физика) в разделе «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» в теме «Производная и дифференциал функции» на формирование понятия производная и дифференцируемая функция отводится 4 лекционных часа, в рамках которых необходимо не только привести в систему и скорректировать знания студентов об определении понятия производной функции, её физическом и геометрическом смысле, но и существенно расширить эти знания понятиями односторонних производных, дифференцируемости функции, представлениями о связи между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Очевидно, что основная часть работы по усвоению материала, то есть его пониманию и запоминанию, а в дальнейшем и применению, должна быть выполнена студентом самостоятельно после работы на лекции. Поэтому важным является определение преподавателем основных вопросов содержания этой темы и плана по изучению её материала.

После овладения понятиями производной и дифференцируемой функции одной переменной студенты должны усвоить определения производной функции в точке, односторонних производных, уметь доказывать дифференцируемость или недифференцируемость функции с помощью определения производной или через понятие односторонних производных. Для формирования соответствующих понятий темы можно предложить следующие основные вопросы:

1. Определения производной функции в точке, односторонних производных, дифференцируемой функции.

2. Теорема о связи односторонних производных с производной функции в точке.

3. Понятие дифференцируемой функции в точке и на множестве.

Требования к овладению сутью содержания первого вопроса заключаются в том, что студент должен:

- знать, что вопрос о поиске производной функции (её существовании) ставится только для внутренних точек области определения;
- знать, как определяется приращение функции в точке, соответствующее заданному приращению аргумента;
- уметь вычислять производную функции в точке как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, который вызывает это приращение, если приращение аргумента стремится к нулю;
- уметь вычислять односторонние производные функции в точке через односторонние пределы отношения приращения функции к приращению аргумента, вызывающего это приращение, если приращение аргумента стремится к нулю слева или справа.

Требования к овладению сутью содержания второго вопроса заключаются в том, что студент должен уметь:

- сформулировать теорему, которая является необходимым и достаточным условием существования производной функции в точке;
- доказывать данную теорему с помощью теоремы о связи односторонних пределов функции в точке с пределом функции в этой точке.

Требования к овладению сутью содержания третьего вопроса заключаются в том, что студент должен уметь:

- различать понятия производной функции в точке и дифференцируемость функции в точке;

- понимать, что функция является дифференцируемой в точке, если она имеет конечную производную в этой точке, и что функция является дифференцируемой на множестве, если она имеет конечную производную в каждой точке этого множества;
- уметь исследовать функцию на дифференцируемость в точке и на множестве.

Для выполнения перечисленных требований необходим инструментарий, обеспечивающий овладение комплексом изучаемых понятий. Одним из элементов этого инструментария является детализированная схема исследования функции на дифференцируемость:

1. Найти область определения функции и выявить её внутренние точки (дальнейшее исследование проводить только в этих точках).

2. В соответствии с видом функции найти приращение функции в точке, которое соответствует приращению аргумента $\Delta x \neq 0$, или найти приращение функции в точке слева, которое соответствует приращению аргумента $\Delta x < 0$ и найти приращение функции в точке справа, которое соответствует приращению аргумента $\Delta x > 0$.

3. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, который вызывает это приращение, если приращение аргумента стремится к нулю или найти односторонние пределы отношения приращения функции к приращению аргумента, если $\Delta x \rightarrow 0 - 0$ или $\Delta x \rightarrow 0 + 0$.

4. Сделать вывод:

- если предел отношения приращения функции к приращению аргумента в точке существует и равен действительному числу, то функция имеет конечную производную в точке и является дифференцируема в этой точке;
- если пределы отношения приращения функции к приращению аргумента слева и справа в точке существуют и равны действительному числу, то функция имеет конечную производную в точке и дифференцируема в этой точке;
- если пределы отношения приращения функции к приращению аргумента слева и справа в точке существуют, но не равны между собой, то функция имеет левую и правую производную в точке и не является дифференцируемой в этой точке;
- если хотя бы один из пределов отношения приращения функции к приращению аргумента слева или справа в точке равен бесконечности, то функция недифференцируема в точке.

Для закрепления понятий этой темы студентам можно предложить следующие контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определения: производной функции в точке, односторонних производных, дифференцируемой функции.

2. Какому условию должна удовлетворять точка области определения функции, в которой ставится вопрос о существовании её производной?

3. Сформулируйте и докажите теорему о связи односторонних производных с производной функции в точке.

4. Исследуйте на дифференцируемость функцию:

$$\text{а) } f(x) = x; \text{ б) } f(x) = |x^2 - 1|; \text{ в) } f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ 1 - x, & \text{если } x < 0 \end{cases} \text{ [1, с. 73].}$$

Организованная таким образом работа студентов позволяет оказать им методическую помощь в процессе освоения образовательных программ, даёт возможность перейти от пассивного усвоения знаний к активному, приобрести собственный опыт в организации самостоятельной деятельности при обучении и подготовке к контрольным работам, зачетам и экзаменам, позволяет поддерживать интерес к изучению дисциплины.

Список использованных источников

1. Шалік, Э. У. Дыферэнцыяльнае злічэнне функцыі адной зменнай : вуч.-мет. дапаможнік / І. М. Гуло, Э. У. Шалік, А. К. Ражко. – Мінск : БДПУ, 2011. – 198 с.