

Е. П. Кузнецова, Ю. А. Лаппалайнен

E. Kuzniatsova, J. Lappalainen

УО «Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка» (Минск, Беларусь)

ПРОБЛЕМЫ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЯ «ТОЧКА МАКСИМУМА ФУНКЦИИ» В УЧЕБНЫХ ПОСОБИЯХ ДЛЯ ШКОЛ БЕЛАРУСИ

PROBLEMS OF INTRODUCING THE CONCEPT OF «MAXIMUM POINT OF A FUNCTION» IN TEACHING MANUAL FOR SCHOOLS OF BELARUS

Выявлены методические проблемы формирования понятия точки экстремума функции в белорусских школьных пособиях по алгебре на примере введения понятия «точка максимума функции». Результаты опроса обучающихся подтверждают неполноту усвоения этих понятий и необходимость увеличения числа графических заданий.

Methodological problems in the formation of the concept of an extremum point of a function in Belorussian school teaching manual on algebra are identified using the example of introducing the concept of a “maximum point of a function”. The results of a survey of students confirm the problematic nature of fully mastering these concepts and the need to solve them through an increase in the number of graphic tasks.

Ключевые слова: точки экстремума; точка максимума функции; введение и усвоение понятия; овладение понятием.

Keywords: extremum points; maximum point of a function; introduction and mastery of a concept; mastery of a concept.

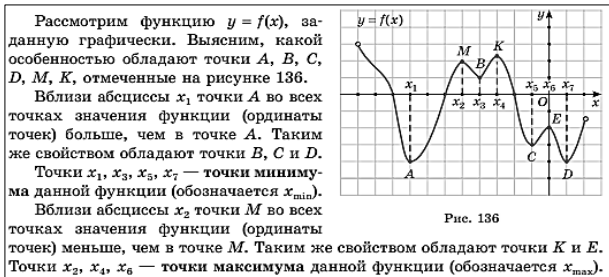
Процесс формирования представлений о содержании и объёме математического понятия включает в себя несколько этапов, где основным является усвоение (запоминание и понимание) определения этого понятия, а затем и овладение им посредством продуктивного применения [1].

Рассмотрим, как введено, например, понятие «точка максимума функции» в современных учебных пособиях по алгебре для школ Беларуси [2] – [5] (2000–2019 гг. издания).

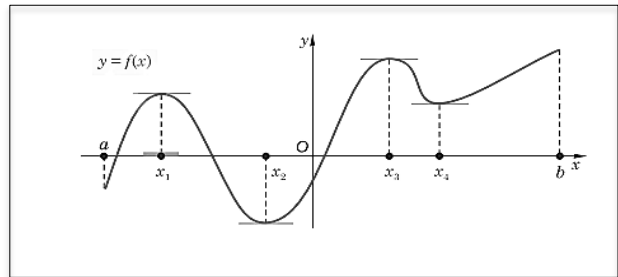
В действующем пособии [2] рассматриваемое понятие только разъясняется на изображении графика некоторой непрерывной функции с использованием отмеченных на нём конкретных точек максимума / минимума (рисунок 1, а), для которых введены и специальные обозначения x_{\max} / x_{\min} .

В учебном пособии [3] понятие «точка максимума функции» тоже сначала вводится и поясняется с помощью изображения графика непрерывной функции, причём на рисунке не только отмечена точка максимума x_1 , но и выделена (отрезком синего цвета) её двусторонняя окрестность (рисунок 1, б), после чего формулируется общее математическое определение соответствующего понятия. Обозначение x_{\max} предложено позже в записи решения конкретного задания.

В учебном пособии [4] по алгебре для X классов с углублённым уровнем изучения математики определение понятия «точка максимума функции» дано сразу и затем проиллюстрировано на изображениях графиков непрерывных функций (подобных рисункам 1, а, б). Специальное обозначение для точки максимума функции отсутствует, но в решении одного из заданий символом y_{\max} обозначено значение максимума функции.



а)



б)

Рисунок 1 – Фрагменты страниц с рисунками, иллюстрирующими введение понятия «точка максимума функции»: а) из пособия [2]; б) из пособия [3]

В интегрированном учебном пособии по алгебре и геометрии [5] тоже сразу формулируется определение понятия точки максимума, которое также иллюстрируется с помощью графика непрерывной функции. Однако позже в одном из заданий встречается и график разрывной функции (рисунок 2), чего нет в других белорусских учебных пособиях. В таблице данных, полученных при решении задания на исследование свойств функции, использованы записи «max» и «min», другие обозначения, связанные с точками экстремума, в пособии [5] отсутствуют.

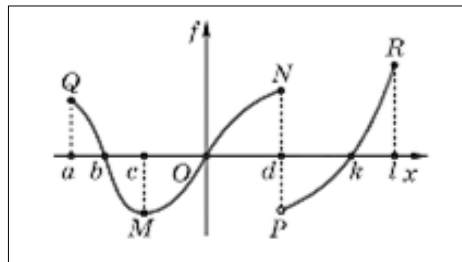


Рисунок 2 – Изображение графика разрывной функции из пособия [5] к заданию, в котором нужно указать её точки максимума и минимума

В таблице 1 отражены результаты анализа определений понятия «точка максимума функции» из белорусских пособий [3] – [5] по алгебре. Выделены особенности, отличающие их формулировки: обозначения функции и точки максимума; наличие каких-либо требований к функции (например, непрерывная, чётная и т. п.); обозначения и слова, используемые для описания окрестности точки максимума; вид неравенства, определяющего эту точку.

Таблица 1 – Особенности определений понятия «точка максимума функции» в учебных пособиях по алгебре для школ Беларуси

Учебное пособие	Обозначения функции и её точки максимума в определении	Требования определения к функции	Обозначение и/или описание окрестности точки максимума в определении	Вид неравенства в определении
[3]	f, x_0	нет	U, окрестность точки x_0	$f(x_0) \geq f(x)$
[4]	$f(x), x_0$	нет	δ -окрестность точки $x_0, x \neq x_0$	$f(x) < f(x_0)$
[5]	$f(x), x_0$	нет	Некоторая окрестность x_0	$f(x) \leq f(x_0)$

Итак, в определениях из учебных пособий [3] – [5] функция традиционно обозначена буквой f , а точка максимума – символом x_0 , и при этом не упоминается никаких требований

к функции, то есть точка максимума определена для **любых функций**, как непрерывных, так и разрывных.

Из текста пояснений, определений и рисунков, сопровождающих введение понятия «точка максимума функции» в разных пособиях, не всегда ясно, что для окрестности точки x_0 **обязательны следующие особенности**: её *двусторонность*, её *симметрия* относительно точки максимума, а также *ограничение* для самой точки x_0 ($x \neq x_0$). Так, например, в пособии [5] информация о двусторонности окрестности точки максимума в явном виде не сообщается ни в текстах теории, ни в иллюстрациях.

Запись **строгого** неравенства для сравнения значений функции в точках окрестности со значением функции в точке максимума в пособии [2] подразумевается из пояснений (к рисунку 1, а) и она явно использована в пособии [4] в определении этого понятия. А в определениях из пособий [3] и [5] записан знак **нестроого** неравенства. Заметим, что определение точки максимума функции посредством нестроого неравенства расширяет объём этого понятия. Так, к точкам максимума на основании теории из пособий [3] и [5] можно отнести все точки области определения постоянной функции, например, $y = 13$, заданной на множестве действительных чисел R .

Анализ методики введения понятия «точка максимума (минимума) функции» в указанных белорусских пособиях позволяет предвидеть затруднения обучающихся при отыскании таких точек на изображениях графиков разрывных функций.

В 2020 и 2023 году добровольцы из числа учащихся XI классов СШ № 204 г. Минска и студентов III–IV курсов физико-математического факультета БГПУ отвечали на вопросы: «Есть ли у функции f , график которой изображен на рисунке 3, точки максимума? Сколько их? Если они есть, то укажите эти точки». Правильный ответ «Да. Три: -1 ; 0 ; 1 » в 2020 году дали лишь 2 студента из 17, то есть 11,8 % [6, стр. 49]; в 2023 году – 0 учащихся из 19 и 5 студентов из 32, то есть 0 % и 15,6 %. У учащихся такой результат можно объяснить тем, что графики разрывных функций они не рассматривали. Но лишь 4 школьника из 19, то есть 21 %, распознали точку максимума $x = 0$. Часть ошибок получена из-за путаницы с понятием «максимум функции».

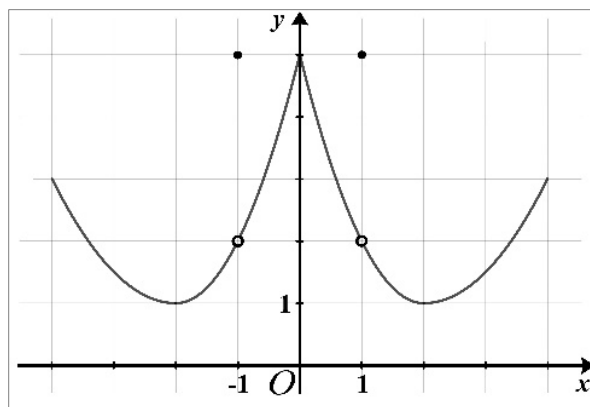


Рисунок 3 – Изображение графика функции из статьи [6], использованного для опросов школьников и студентов в 2020 и 2023 году

Таким образом, результаты проведенных опросов обучающихся подтверждают наличие серьезных проблем в овладении понятием «точка максимума (минимума) функции», которое оказалось многими усвоено в неполном объеме для непрерывной функции (не воспринимаются, например, точки излома) и не усвоено для разрывной функции. Эти проблемы связаны: с несовершенством методики введения соответствующих понятий, с качеством подбора иллюстраций к определениям, а также с недостаточным количеством графических заданий на чтение соответствующих свойств функции.

Список использованных источников

1. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 338 с.
2. Алгебра : учеб. пособие для 10 кл. / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. – Минск : Нар. асвета, 2019. – 285 с.
3. Алгебра : учеб. пособие для 10 кл. / Е. П. Кузнецова и др. – Минск : Нар. асвета, 2013. – 271 с.
4. Алгебра и начала анализа : Учеб. для 10-го кл. / К. О. Ананченко и др. – Минск : Нар. асвета, 2000. – 541 с.
5. Математика : учеб. пособие для 10-го кл. / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013. – 408 с.
6. Наливко, Н. В. Особенности графических заданий при изучении функций в общеобразовательной школе / Н. В. Наливко, Е. П. Кузнецова // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2020. – № 6. – С. 43–51.

УДК 378

Л. Насир, Г. О. Кожашева

L. Nassir, G. Kozhasheva

Жетысуский университет имени Ильяса Жансугурова (Талдыкорган, Казахстан)

ОБУЧЕНИЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ОЦЕНКЕ ДОСТИЖЕНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ ПРЕДМЕТА «ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА»

TEACHING FUTURE MATHEMATICS TEACHERS TO ASSESS STUDENT ACHIEVEMENT IN COMBINATION WITH THE "ELEMENTARY MATHEMATICS" LESSON

Помимо преподавания элементарной математики, очень важно научить будущих учителей математики оценивать успеваемость учащихся. Внедрение инновационных технологий в планирование уроков окажет положительное влияние на улучшение результатов обучения. В данной статье кратко рассмотрены способы проведения эффективного оценивания при преподавании предмета элементарной математики будущим учителям математики, а также даны методические указания о том, как составить план урока в будущем и как оценить успеваемость ученика.

In addition to teaching elementary mathematics, it is very important to teach future mathematics teachers how to assess student learning. Introducing innovative technologies into lesson planning will have a positive effect on improving learning outcomes. This article briefly examines how to conduct an effective assessment when teaching a subject of elementary mathematics to future mathematics teachers, as well as a methodical instruction on how to design a lesson plan in the future and how to assess the student's achievement.

Ключевые слова: элементарная математика; будущий учитель; учебная успеваемость; методы оценивания; план урока.

Keywords: elementary mathematics; future teacher; educational achievement; assessment methods; lesson plan.

Training of future teachers of mathematics is the most important issue in the field of education. One of the most important aspects of teaching them is equipping them with the skills to