УДК 514.1

Н. В. Гриб[1], Е. Е. Верига[1], К. А. Борисенко[2]
N. Grib, E. Veriga, K. Borisenko
[1] УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»
[2]ГУО «Гимназия № 43 г. Минска» (Минск, Беларусь)

ПРИМЕНЕНИЕ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПЛАНИМЕТРИИ

APPLICATION OF AFFINE PLANE TRANSFORMATIONS TO SOLVING PLANIMETRY PROBLEMS

Систематизированы сведения об аффинных преобразованиях плоскости и их свойствах. Выделены признаки планиметрических задач, для решения которых могут быть использованы аффинные преобразования. Приведены примеры решения задач методом аффинных преобразований.

The application of affine plane transformations to solving planimetry problems is considered. The signs of problems for which affine transformations can be used are highlighted.

Ключевые слова: преобразование плоскости; движение плоскости; аффинное преобразование и его свойства; аффинный метод решения задач; планиметрия.

Keywords: plane transformation; plane motion; affine transformation and its properties; affine method for solving problems; planimetry.

Понятие геометрического преобразования – одно из важнейших в геометрии. Ещё в 1872 г. Ф. Клейн обосновал факт того, что геометрические преобразования могут быть положены в основу определения самой геометрии. Например, группы движений и подобий определяют евклидову геометрию.

К сожалению, учащиеся не могут познакомиться в должной мере с геометрическими преобразованиями на уроках математики. Однако на факультативных занятиях, при подготовке к олимпиадам и научно-практическим конференциям, а также в рамках научно-исследовательской деятельности это знакомство будет чрезвычайно полезным. Геометрические преобразования не только представляют мощный инструмент решения задач, но и позволяют взглянуть на математику по-новому, увидеть ее красоту, стройность и целостность.

Даже если изучение преобразований плоскости не предусмотрено учебной программой (например, как в настоящий момент в Республике Беларусь на II и III ступенях обучения), у школьников присутствуют наглядно-интуитивные представления о параллельном переносе, повороте, осевой и центральной симметрии, подобии. В настоящее время эти представления сформированы во многом и благодаря изучению графических редакторов, где применение указанных преобразований к изображению – рядовая операция. Там же часто используются и преобразования, отличные от движений и подобий, – например, сжатие к прямой (рисунок 1) и сдвиг или скос (рисунок 2, не путать с параллельным переносом, также часто называемым сдвигом). Общим свойством всех перечисленных выше преобразований является то, что любую прямую они переводят в прямую. В математике взаимно однозначное преобразование евклидовой плоскости, переводящее прямую в прямую, называется аффинным (см., например [1, с. 617]).

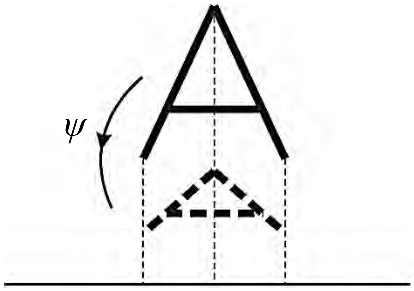

Рисунок 1 – Сжатие к прямой

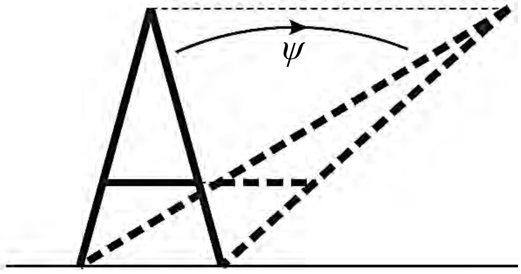

Рисунок 2 – Сдвиг вдоль прямой

Группа аффинных преобразований определяет аффинную геометрию, которая изучает свойства фигур, инвариантные при любых аффинных преобразованиях. Такие свойства фигур называются *аффинными*. Группы движений и подобий являются подгруппами группы аффинных преобразований, что обуславливает бедность аффинной геометрии фактами в сравнении с метрической. Несмотря на это, аффинные преобразования оказываются во многом даже более эффективным инструментом решения задач планиметрии, чем движения и подобия! Дело в том, что движения и подобия часто используются при решении задач на построение циркулем и линейкой, но среди задач на доказательство и вычисление решаются с использованием этих преобразований лишь немногие. Аффинные же преобразования оказываются полезными при решении целого класса задач, которые называются аффинными задачами. Выделим признаки таких задач и свойства аффинных преобразований, которые могут быть при этом использованы, а также продемонстрируем метод аффинных преобразований на примере решения некоторых задач.

Основными свойствами аффинных преобразований, которые оказываются полезными при решении задач, являются следующие.

1. Образом прямой является прямая.

2. Параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

3. Аффинное преобразование сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых. В частности, середина отрезка переходит в середину отрезка.

4. Образом треугольника является треугольник. Образом данного треугольника может быть любой треугольник.

5. Образом параллелограмма является параллелограмм. Образом данного параллелограмма может быть любой параллелограмм.

6. Образом эллипса является эллипс. Образом данного эллипса может быть любой эллипс.

7. Медиана и средняя линия треугольника переходят соответственно в медиану и среднюю линию его образа.

8. Центр фигуры переходит в центр ее образа.

9. Аффинное преобразование сохраняет отношение площадей фигур.

Понятно, что аффинные преобразования могут быть использованы при решении тех задач, в которых идёт речь об аффинных свойствах фигур: *параллельности прямых, принадлежности точек одной прямой или одной точки нескольким прямым, отношении длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, отношении площадей, произвольных треугольниках, параллелограммах, эллипсах, медианах и средних линиях треугольника, центрах фигур*.

Аффинное преобразование в общем случае не сохраняет величины углов, не переводит окружность в окружность, не сохраняет длины отрезков и отношения длин отрезков, лежащих на пересекающихся прямых. Поэтому можно выделить признаки задач, не являющихся аффинными (т.е. метрических задач): в их условии присутствуют *окружности,* *квадраты, треугольники определенного вида (равносторонний, равнобедренный, с заданными сторонами, углами), биссектрисы, высоты, заданы величины углов, длины или отношения длин лежащих на пересекающихся прямых отрезков.*

Суть метода аффинных преобразований состоит в том, что данная в условии фигура с помощью подходящего преобразования переводится с сохранением аффинных свойств в фигуру, для которой решение задачи проще. Например, произвольный треугольник можно перевести в правильный или прямоугольный равнобедренный треугольник, параллелограмм – в квадрат, произвольную трапецию – в равнобедренную, эллипс – в окружность.

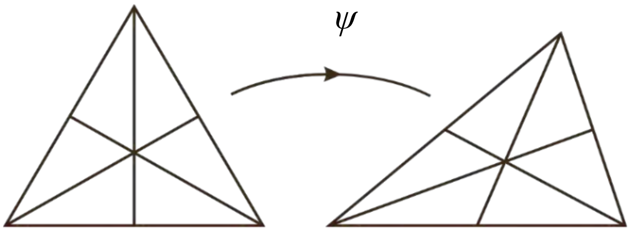

Рисунок 3 – Отображение правильного треугольника в произвольный

Пример 1. *Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1.*

Легко убедиться, что в задаче речь идёт об аффинных свойствах: свойстве фигуры быть треугольником, принадлежности одной точки нескольким отрезкам, отношении длин отрезков, лежащих на одной прямой, свойстве отрезка быть медианой треугольника. Таким образом, задача является аффинной. Вместо данного треугольника рассмотрим сначала правильный. Для него утверждение задачи устанавливается легко. По свойству 4 существует аффинное преобразование, переводящее правильный треугольник в исходный (рисунок 3). При этом медианы, пересекающиеся в одной точке, перейдут в медианы, пересекающиеся в одной точке, а отношение отрезков, на которые медианы разбиваются точкой пересечения, сохранится.

Пример 2. Доказать, что медианы треугольника разбивают его на 6 равновеликих треугольников.

Задача похожа на предыдущую, но в ней появляется аффинное свойство инвариантности отношения площадей при аффинном преобразовании. Решение задачи также аналогично решению предыдущей задачи.

Пример 3. Через центр параллелограмма провести два отрезка (не параллельные сторонам и не диагонали), которые делят его на 4 равновеликие фигуры.

В условии задачи обнаруживаем аффинные свойства: свойство фигуры быть параллелограммом, свойство точки быть центром фигуры, отношение площадей.

Рассмотрим более «удобную» фигуру – квадрат. В квадрате искомые отрезки будут лежать на любых перпендикулярных прямых, проходящих через его центр (рисунок 4). Действительно, равновеликость образованных фигур следует из их равенства. Но перпендикулярность искомых отрезков может заставить усомниться в том, что к этой задаче применимо аффинное преобразование. Ведь нам нужно будет найти образы этих отрезков при переводе квадрата в данный параллелограмм, а угол между прямыми не сохранится. Однако нужно обратить внимание на то, что концы отрезков делят стороны квадрата в одном и том же отношении, а это свойство является аффинным. Таким образом, для решения задачи достаточно разделить все стороны параллелограмма в одном и том же отношении и соединить точки на противоположных сторонах.

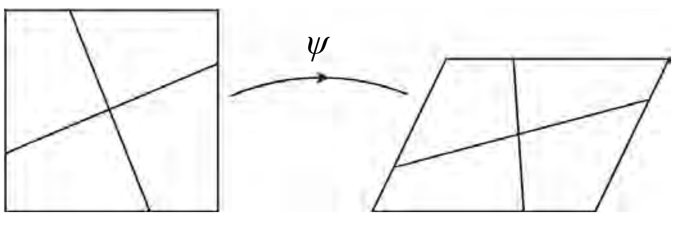

Рисунок 4 – Отображение квадрата в произвольный параллелограмм

Также отметим, что при формировании умения пользоваться аффинным методом решения планиметрических задач нужны не только свойства аффинных преобразований и признаки аффинных задач. Также полезно знать и названные выше признаки метрических задач. Например, после решения задачи о медианах треугольника может возникнуть предположение, что тем же способом можно доказать наличие общей точки у биссектрис или высот треугольника. Но свойство отрезка быть биссектрисой или высотой является метрическим, поэтому метод аффинных преобразований здесь не применим.

Список использованных источников

1. Постников, М. М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. – М. : Наука, 1973. – 752 с.

УДК 793.737.012

Е. А. Иванова, О. Н. Пирютко
E. Ivanova, O. Pirutko
УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (Минск, Беларусь)

ПРИЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КЛАССОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ В ОБУЧАЮЩУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

METHODS OF INCLUDING MATHEMATICAL TEACHING CLASS STUDENTS INTO LEARNING ACTIVITIES

В статье рассматриваются некоторые приемы включения учащихся педагогических классов в обучающую деятельность на основе системного подхода к профильной подготовке педагогических классов. Приведены примеры реализации этих приемов.

The article discusses some methods of including students of pedagogical classes in educational activities based on a systematic approach to the specialized training of pedagogical classes. Examples of implementation of these techniques are given.

Ключевые слова: педагогические классы; системный подход; обучающая деятельность

Keywords: pedagogical classes; systematic approach; educational activities

В Республике Беларусь создана система непрерывного педагогического образования, где особое внимание уделяется педагогической профилизации классов на 3-й ступени общего среднего образования (10–11 классы). В рамках этой системы выявлен комплекс организационных и психолого-педагогических условий, целью которых является развитие личностного и профессионального самоопределения учащихся в период обучения в школе.

Цель педагогической профилизации – формирование целостного представления о педагогической деятельности.

Задачи педагогической профилизации:

– осмысление специфики педагогической профессии;
– создание условий для понимания учащимися требований к профессиональной педагогической деятельности;
– создание условий для проектирования обучающимися стратегии профессионального и личностного саморазвития.