УДК 517.9
А. Н. Лаврёнов
A. H. Lavrenov
Белорусский государственный педагогический
университет имени Максима Танка
(Минск, Беларусь)

ЦЕПОЧКА ФАКТОРИЗАЦИИ С ОТРАЖЕНИЯМИ
FACTORIZATION CHAIN WITH REFLECTIONS

Аннотация. В работе рассматривается периодическое замыкание цепочки факторизации с отражениями. Получено, что соответствующие этому замыканию нелинейные операторные алгебры для *N*=2 и *N*=4 преобразуется в соответственно в аналоги алгебры *SU(1,1)* и квадратичной алгебры Хана.

Abstract. The periodic closure of the factorization chain with reflections are discussed. It is found that the nonlinear operator algebras corresponding to this closure for *N*=2 and *N*=4 are transformed into analogues of the *SU(1,1)* algebra and the quadratic Hahn algebra *QH(3)*, respectively.

Ключевые слова: цепочка факторизации; отражения; осциллятор Данкля; алгебр Хана; периодическое замыкание

Key words: factorization chain; reflections; Dunkl oscillator; Hahn algebras; periodic closure

Шредингер [1] разработал метод факторизации как удобный инструмент решения задачи на собственные значения уравнения $L\varphi(x) = (-d^2/(dx^2) + u(x))\varphi(x) = \rho\varphi(x)$ для потенциала *u(x).* В данном методе вышенаписанное уравнение заменяется на цепочку $L_j\varphi_j(x) = \rho\varphi_j(x)$, где j=0, ±1,... и гамильтонианы L_j удовлетворяют следующим соотношениям

$$L_j A_j^+ = A_j^+ L_{j+1} \text{ и } A_j^- L_j = L_{j+1} A_j^- \text{ и } A_j^\pm = \pm\, d/(dx + f(x)$$

или на представление $L_j = A_j^+ A_j^- + \rho_j$ и цепочку факторизации

$$A_{j+1}^+ A_{j+1}^- + \rho_{j+1} = A_j^- A_j^+ + \rho_j.$$

В частности, решения последней дают константы ρ_j как дискретный спектр гамильтонианов L_j. Среди них существуют такие решения, которые удовлетворяют следующему периодическому условию

$$L_{j+1} = L_j + \mu \text{ и } \rho_{j+1} = \rho_j + \mu.$$

В работах [2-4] рассматривались различные обобщения цепочки факторизации и периодического условия. Так, если мы выберем в качестве новых операторов $B_j^{\pm}$ различные степени N операторов рождения-уничтожения гармонического оператора, то для $N=2$ будем иметь алгебру $SU(1,1)$, а для $N=4$ будем иметь алгебру Хана $QH(3)$.

С другой стороны, хорошо известно так называемое R-обобщение алгебры Гейзенберга-Вейля $W(1)$, где вводится дополнительный оператор R для описания отражательной симметрии [5]. Напомним коммутационные соотношения между операторами данной алгебры

$$[C_-; C_+] = 1 + QR\ ; [C_0; C_+] = C_+; [C_0; C_-] = -C_-; \{R; C_+\} = \{R;\ C_-\} = 0.$$

В частности, модель гармонического осциллятора трансформируется в модель осциллятора Данкля, где гамильтониан имеет вид $2H_{DO} = -D^2 + \omega^2 x^2$, и обычная производная ∂ заменяется на производную Данкля D

$$\partial \to D = \partial + \gamma(1 - R)/x.$$

Таким образом, цель данной работы – обобщить полученный ранее результат на случай выбора в качестве новых операторов $D_j^{\pm}$ различные степени N операторов рождения-уничтожения осциллятора Данкля. Рассмотрим детально случаи для N=2 и N=4.

Последовательно будем иметь следующие соотношения:

для N=1
$$D_+D_- = D_0 - 1/2 +\ QR;$$
$$D_-D_+ = D_0 + 1/2 -\ QR$$

для N=2
$$D_+D_- = (D_0 - 1/2 +\ QR)(D_0 - 3/2 -\ QR)$$
$$D_-D_+ = (D_0 + 1/2 -\ QR)\ (D_0 + 3/2 +\ QR)$$

для N=3
$$D_+D_- = (D_0 - 1/2 +\ QR)(D_0 - 3/2 -\ QR)\ (D_0 - 5/2 +\ QR)$$
$$D_-D_+ = (D_0 + 1/2 -\ QR)\ (D_0 + 3/2 +\ QR)\ (D_0 + 5/2 -\ QR)$$

для N=4
$$D_+D_- = \prod_{k=1}^{k=4}(D_0 - \tfrac{2k-1}{2} + (-1)^{k+1}QR)$$
$$D_-D_+ = \prod_{k=1}^{k=4}(D_0 + \tfrac{2k-1}{2} + (-1)^{k}\ QR).$$

Используя их, нетрудно найти соответствующие полиномиальные алгебры. В частности, для N=2 получаемая алгебра не содержит членов с оператором R, отвечающим за описание отражательной симметрии, в отличии от случая для N=4.

Итак, в работе проанализировано периодическое замыкание цепочки факторизации с отражениями. Получено, что соответствующие этому замыканию нелинейные операторные алгебры преобразуются в соответствующие аналоги таких же алгебр, но с или без дополнительных слагаемых, включающих оператор R.

Список использованных источников

1. Schrödinger, E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. / Schrödinger, E. // Proc. Roy. Irish. Soc. A. – 1940. – vol. 46. – no. 1. – P. 9–16.

2. Веселов, А. П., Шабат, А. Б. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера / А. П. Веселов, А. Б. Шабат // Функц. анализ и его прил.. – 1993. – том 27. – выпуск 2. – С. 1-21.

3. Spiridonov, V., Vinet, L., Zhedanov, A. S. Periodic reduction of the factorization chain and the Hahn polynomials / V. Spiridonov, L. Vinet, A. Zhedanov // Journal of Physics A General Physics – 1993. – том 26. – №18. – С. L669-L675.

4. Лаврёнов, А. Н. Nonlinear deformation of dressing chain / А. Н. Лаврёнов // Advance in Synergetic. – 1996. – Vol. 8. – С. 1-3.

5. Plyushchay, M. S. R-deformed Heisenberg algebra / M. S. Plyushchay // LANL, Cornell University Library. Available at: https://arxiv.org/abs/hep-th/9701065 (Submitted on 14 Jan 1997).