Весці БДПУ. Серыя 3. 2023. № 4. С. 35–41

УДК 514.115

БЛИЖАЙШИЕ ТОЧКИ ДВУХ КАРТ И ИХ ПОСТРОЕНИЕ

Н. В. Гриб,
кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка;
К. А. Борисенко,
учитель математики ГУО «Гимназия № 43 г. Минска»;
В. С. Миналто,
магистрант Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка

Поступила в редакцию 24.10.2023.

UDC 514.115

NEAREST POINTS OF TWO MAPS AND THEIR CONSTRUCTION

N. Grib,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank;
K. Borisenko,
Mathematics teacher, State educational institution «Gymnasium No. 43 in Minsk»;
V. Minalto,
Master Student, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank

Received on 24.10.2023.

В статье исследуется задача о ближайших соответственных точках двух лежащих в одной плоскости географических карт одной местности. С помощью метода геометрических преобразований найдены все ближайшие точки карт, каждая из которых имеет произвольный масштаб и расположение на плоскости. Рассмотрены различные способы построения ближайших, в том числе совпадающих, точек с помощью циркуля и линейки.

Ключевые слова: преобразование плоскости; движение; преобразование подобия; неподвижная точка преобразования.

The article investigates the problem of the nearest corresponding points of two geographical maps of the same area. Using the geometric transformations method, all the nearest points are found at an arbitrary scale and location of maps. Different methods of constructing the nearest, including coinciding points using a circular and ruler are considered.

Keywords: plane transformations, plane motion, similarity transformation, transformation fixed point.

Введение. Геометрические преобразования играют чрезвычайно важную роль в геометрии. В 1872 г. Ф. Клейн предложил классификацию различных отраслей геометрии по группам преобразований пространства. Например, евклидова геометрия определяется группами движений и подобий.

Геометрические преобразования позволяют получить простые, эффектные и поучительные решения многих задач элементарной геометрии. При этом необходимо отметить, что перечень задач, в решении которых метод преобразований демонстрируется в многочисленной литературе, достаточно стандартен. Однако геометрические преобразования нередко оказываются применимы к задачам, традиционно решаемым другими методами. Одной из таких задач является известная задача о двух географических картах (например, [1, с. 63]): «Две прямоугольные карты одной местности разного масштаба наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка местности» (рисунок 1).

В сборниках олимпиадных и нестандартных задач приводится такое решение этой задачи. Пусть K_1 и K_2 – соответственно большая и меньшая карты. Отметим на K_2 ту же область, что занимает K_2 на K_1. Представим теперь, что в этой области лежит карта K_3 той же местности. Проделаем с картами K_2 и K_3 такую же процедуру и получим новую область и новую карту K_4. Повторяя этот процесс, получим бесконечную последовательность вложенных уменьшающихся карт (рисунок 2), поэтому существует единственная точка, принадлежащая всем картам последовательности. Эта точка и является искомой.

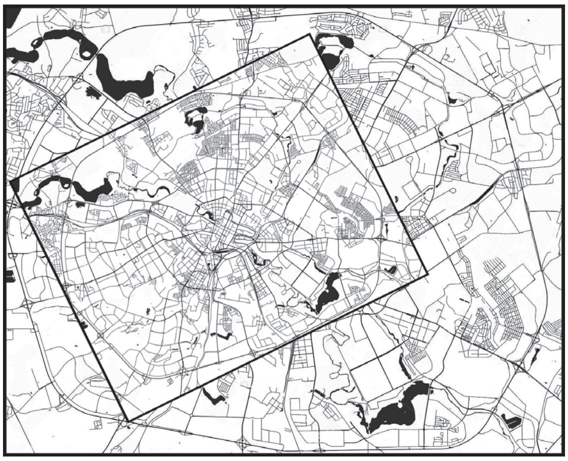


Рисунок 1 – Задача о двух картах

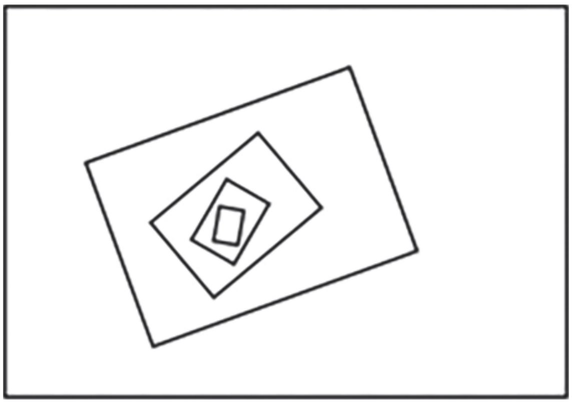


Рисунок 2 – Бесконечная последовательность вложенных карт

Это топологическое решение, безусловно, очень красиво, однако не претендует на абсолютную строгость. Существование общей точки всех карт последовательности кажется интуитивно понятным, но в действительности требует доказательства.

Еще одним недостатком решения является то, что оно не может дать ответ на естественным образом возникающий вопрос: как найти эту общую точку? Этот вопрос был поставлен в работе [2], в ней же, а также в [4] были рассмотрены различные способы построения искомой точки. Следуя этим работам, в дальнейшем будем называть ее неподвижной точкой двух карт по аналогии с неподвижной точкой преобразования.

В [2] также исследован более общий случай – карты не обязательно разных масштабов располагаются на столе произвольно, в том числе допускается переворачивание карт лицевой стороной вниз. Все неподвижные точки найдены при любых масштабах карт и их размещении в плоскости стола.

В работе [3] поставлена и решена следующая задача: проткнуть карты так, чтобы две проколотые точки местности были географически наиболее близки. Назовем ее задачей о проколе ближайших точек. У этой задачи есть решение и в том случае, когда у карт нет неподвижных точек, требуется лишь непустое пересечение карт.

Основная часть. Остановимся подробнее на условии задачи о проколе ближайших точек. *Одна* точка прокола в плоскости стола определяет *две* точки местности – по одной на каждой из карт, и наша задача состоит в минимизации расстояния между такими точками местности посредством выбора оптимальной точки прокола. Поставим похожую задачу: в плоскости стола найти *две* точки – по одной на каждой из карт – изображающие *одну* и ту же точку местности (будем называть такие точки соответственными), чтобы расстояние между ними было минимально. Назовем эту задачу задачей о ближайших соответственных точках карт:

На столе лежат две карты одной местности, каждая из которых имеет произвольный масштаб и расположение на столе, в том числе может лежать лицевой стороной вниз. Найти все их ближайшие соответственные точки.

Задачи о проколе ближайших точек и ближайших соответственных точках очень близки. В случае своего существования неподвижные точки карт сразу же дают решение этих задач, поэтому они являются более общими по отношению к рассмотренной выше задаче о неподвижных точках из [2].

Исследуем решения задачи о ближайших соответственных точках при всех существенно различных расположениях карт и соотношениях их масштабов. Будем использовать тот же инструмент, что и в [2–4] – преобразования плоскости.

Пусть карты F и F' с вершинами A, B, C, D и A', B', C', D' соответственно лежат в плоскости П. Так как F и F' подобны или даже равны в случае одного масштаба, существует единственное подобие плоскости П, переводящее F в F'. Обозначим его через ψ. При равном масштабе F и F' ψ будет движением.

Очевидно, произвольная точка M на карте F указывает на ту же точку местности, что и точка $M' = \psi(M)$ на карте F', т. е. точки M и $\psi(M)$ являются соответственными. Поэтому задача сводится к определению точки $X \in F$, для которой расстояние до $X' = \psi(X)$ минимально. Пара X, X' и является искомой.

Приведем несколько лемм, в которых характеризуется расстояние от точки до образа для некоторых преобразований. Они понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. *Если точки A' и B' являются образами точек A и B при некотором повороте с центром O и $OA < OB$, то $AA' < BB'$.*

Лемма 2. *Пусть точки A' и B' являются образами точек A и B при некоторой скользящей симметрии [5, с. 173] с осью l. Если расстояние от A до l меньше, чем от B до l, то $AA' < BB'$. Если же эти расстояния равны, то $AA' = BB'$.*

Лемма 3. *Если точки A' и B' являются образами точек A и B при некотором преобразовании подобия с неподвижной точкой O и $OA < OB$, то $AA' < BB'$.*

Доказательства лемм элементарны.

Необходимо рассмотреть несколько случаев, определяемых (не)совпадением масштабов карт и направлений их лицевых сторон.

1. Карты имеют одинаковый масштаб и лежат на столе одной стороной. Тогда ψ – движение первого рода, т. е. такое движение, которое сохраняет ориентацию плоскости. Движениями первого рода являются параллельный перенос и поворот [5, с. 125]. Для определения типа движения при известном роде достаточно двух пар точек прообраз – образ. Следовательно, если векторы $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$ равны (рисунок 3), то ψ – параллельный перенос на вектор $\overline{AA'}$. В этом случае все расстояния между точками карты и их образами равны длине AA', поэтому точка X на карте F может быть выбрана произвольно, а точка X' получена смещением X на вектор $\overline{AA'}$.

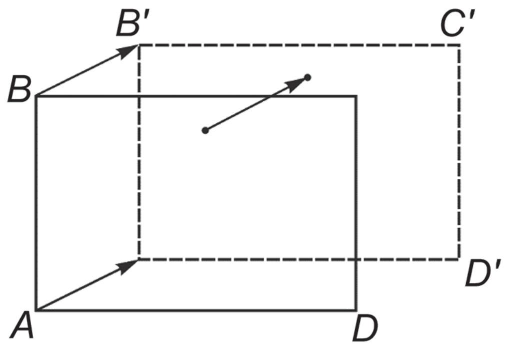


Рисунок 3 – Параллельный перенос карты

Если же $\overline{AA'} \neq \overline{BB'}$, то ψ – поворот. На пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам AA' и BB' найдем центр поворота O. Если точка O принадлежит картам, то она является их неподвижной точкой, и поэтому искомые точки X и X' совпадают с O (рисунок 4, а). В противном случае по лемме 1 искомыми точками будут ближайшие к О точки карт F и F' (рисунок 4, б). Таким образом, в случае, когда ψ – поворот, пара X, X' всегда единственна.

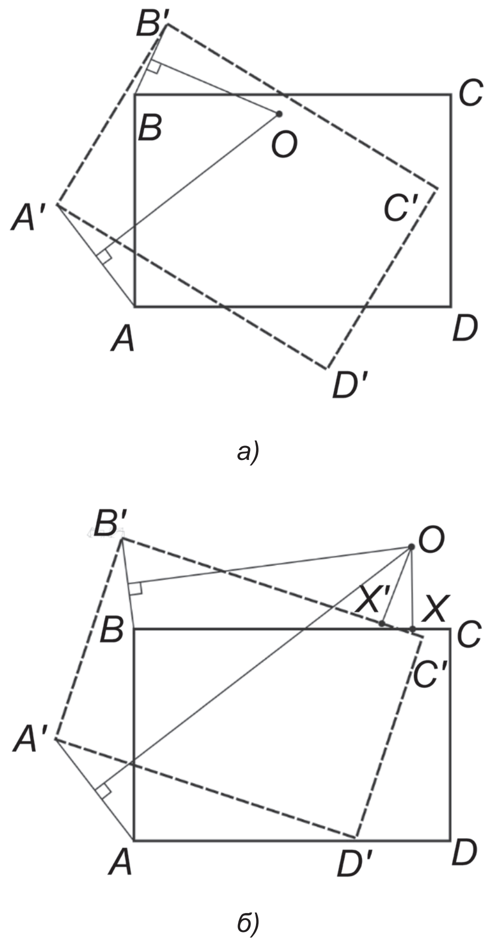
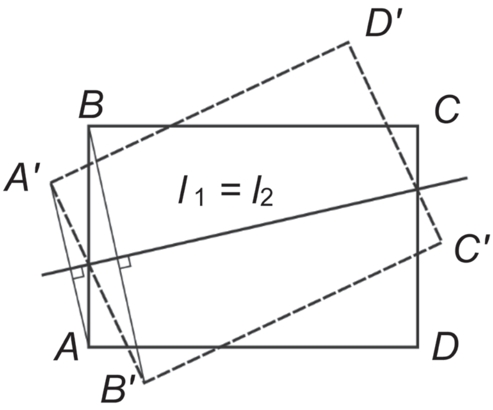
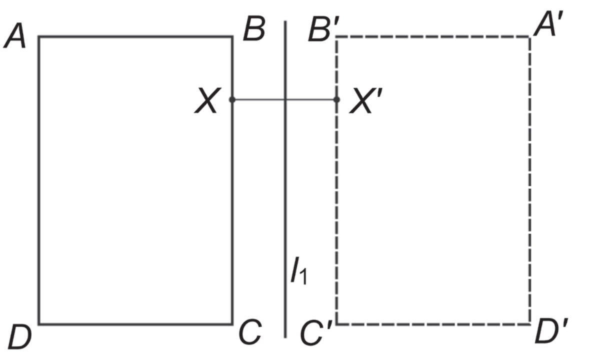


Рисунок 4 – Поворот карты

2. Карты имеют одинаковый масштаб, и ровно одна из карт перевернута. В этом случае ψ – движение второго рода, т. е. осевая или скользящая симметрия [5, с. 126]. Если серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам AA' и BB' совпадают, то ψ – осевая симметрия с осью l_1, поэтому любая точка l_1 является неподвижной точкой ψ (рисунок 5, а), а любая точка l_1, принадлежащая F, – неподвижная точка карт. Если l_1 не пересекает F, то искомой будет любая симметричная относительно l_1 пара $X \in F$, $X' \in F'$, лежащая на минимальном расстоянии от l_1 (рисунок 5, б). Если l_1 параллельна какой-нибудь стороне F, таких пар бесконечно много, в противном случае искомая пара единственна.



а)

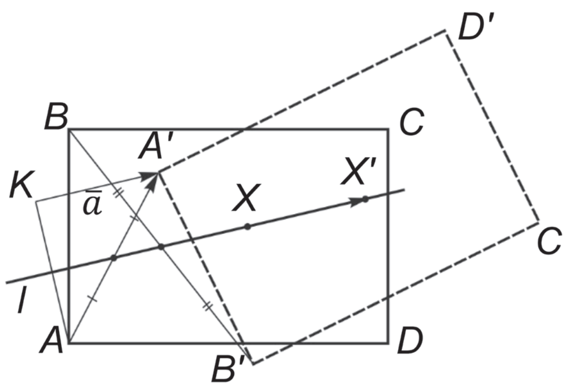


б)

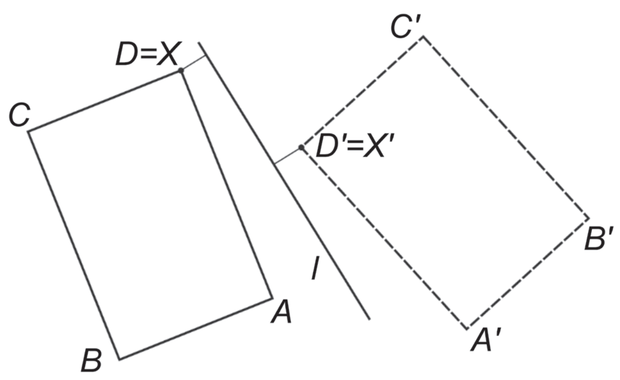
Рисунок 5 – Осевая симметрия

Если $l_1 \neq l_2$, то ψ – скользящая симметрия, у нее нет неподвижных точек. Из того, что любая точка и ее образ при скользящей симметрии равноудалены от оси симметрии l, следует, что середина отрезка с концами в точке и ее образе принадлежит l. Проведем l через середины AA', BB' и спроецируем на l вектор $\overline{AA'}$ – получим вектор переноса $\overline{a}$ скользящей симметрии (на рисунке 6, а $\overline{a} = KA'$). Из леммы 2 следует, что первой искомой точкой можно брать любую точку $X \in F$, лежащую на минимальном расстоянии от l, вторая точка X' будет образом X при найденной скользящей симметрии. Искомых пар будет бесконечно много, если ось l пересекает F (не только по одной вершине) или параллельна какой-нибудь стороне F, в противном случае пара единственна (например, на рисунке 6, б).

3. Пусть теперь карты имеют разный масштаб. Тогда ψ – некоторое преобразование подобия с коэффициентом $k = A'B'/AB$, отличным от единицы. Такое подобие имеет единственную неподвижную точку O (см., например, [5, с. 138]). Ее построение интереснее и сложнее, чем построение неподвижных точек движений, поэтому остановимся на нем подробнее.



а)



б)

Рисунок 6 – Скользящая симметрия

Способ нахождения неподвижной точки подобия с помощью окружностей Аполлония предложен в [2]. Он основан на том, что расстояние от точки O до любой точки плоскости в k раз больше, чем до ее прообраза, поэтому для любой пары прообраз – образ можно построить геометрическое место точек, удовлетворяющих названному условию, – окружность Аполлония. Следовательно, центр подобия будет лежать на пересечении трех окружностей Аполлония для A и A', B и B', C и C', построить их можно с помощью циркуля и линейки. В действительности можно ограничиться построением двух окружностей (рисунок 7), но тогда нужно определить, какая из двух точек пересечения является искомой. Это можно сделать с помощью проверки ориентации какого-нибудь треугольника с одной из вершин в точке O и его образа, например, AOB и $A'OB'$. Ориентации должны совпадать, если обе карты лежат на столе одной стороной, и различаться в противном случае.

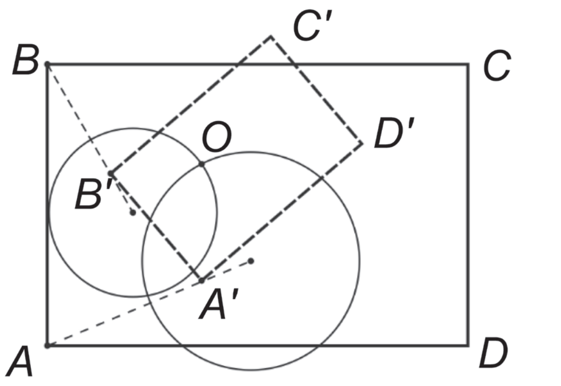


Рисунок 7 – Построение неподвижной точки с помощью окружностей Аполлония

Следующий способ построения неподвижной точки предложен в [4] для карт, лежащих на столе одной стороной. В таком случае ψ – поворотная гомотетия (или центрально-подобное вращение) [5, с. 172], являющаяся композицией поворота и гомотетии с общим центром. Способ основан на том, что при поворотной гомотетии и точки, и прямые поворачиваются на один и тот же угол, а его легко найти, зная какую-нибудь прямую и ее образ, например AB и $A'B'$. Значит, углы, под которыми виден отрезок AA' из точки O и точки K пересечения AB и $A'B'$, равны, поэтому точка O должна лежать на окружности, описанной около треугольника AKA'. Те же рассуждения применимы и к треугольнику BLB', где $L = BC \cap B'C'$. Построив две описанные окружности, получим две точки, одной из которых является искомая точка O (рисунок 8). Для ее определения, как и ранее, нужно убедиться в одной ориентации треугольников AOB и $A'OB'$.

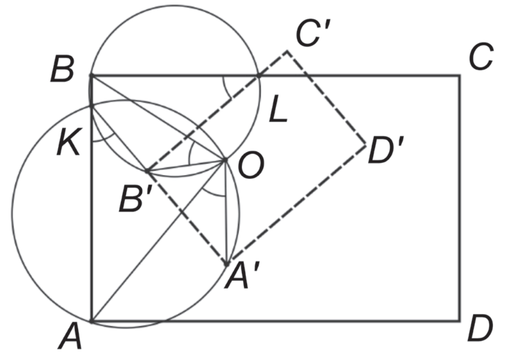


Рисунок 8 – Построение неподвижной точки с помощью описанных окружностей

Если карты лежат на столе разными сторонами, предыдущий способ не применим, так как переводящее F в F' подобие ψ уже не центрально-подобное вращение, а центрально-подобная симметрия – композиция гомотетии и симметрии с осью, проходящей через центр гомотетии [5, с. 173]. Предложим способ построения неподвижной точки, основанный на следующем утверждении.

Лемма 4. *Пусть ψ – центрально-подобная симметрия с осью l, центром O и коэффициентом k, $\psi(A) = A'$. Тогда:*

1) *точка пересечения отрезка AA' и прямой l делит AA' в отношении $1:k$, считая от A;*
2) *точка, симметричная A относительно l, лежит на OA'.*

Оба утверждения леммы легко устанавливаются с помощью известного свойства биссектрисы треугольника.

Разделим два каких-нибудь отрезка с концами в соответственных точках в отношении $1:k$, через полученные точки проведем ось l (рисунок 9). Построим точку A_1, симметричную A относительно l, и на пересечении прямой A_1A' с l получим искомую точку O.

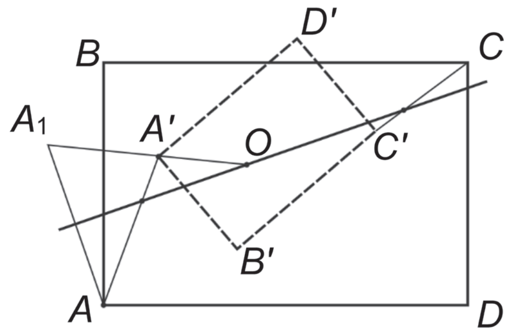
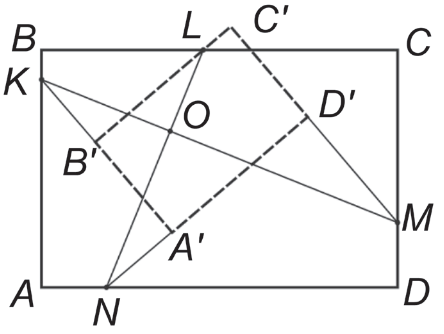


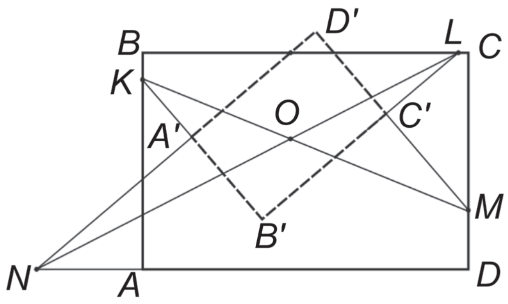
Рисунок 9 – Построение неподвижной точки с помощью свойства биссектрисы треугольника

В [4] предложен еще один способ построения неподвижной точки подобия, удивительный своей простотой и красотой. Для его реализации достаточно линейки, чего никак не приходится ожидать от явно метрической задачи.

1. Строим точки пересечения сторон F с соответственными сторонами F' : $K = AB \cap A'B'$, $L = BC \cap B'C'$, $M = CD \cap C'D'$, $N = AD \cap A'D'$.
2. На пересечении прямых KM и LN находим искомую точку O (рисунок 10, а).



а)



б)

Рисунок 10 – Построение неподвижной точки одной линейкой

Вернемся к решению главной задачи. Считаем, что неподвижная точка O подобия найдена. Если O принадлежит F, то она является искомой. В противном случае по лемме 3 первой искомой точкой X будет ближайшая к O точка карты F, она единственна. Искать точку X' как образ X при подобии ψ не обязательно – ей будет ближайшая к O точка карты F' (рисунок 11).

Способ основан на следующем факте: подобие с коэффициентом $k \neq 1$ увеличивает расстояние от своего центра до произвольной прямой в k раз. Отношение расстояний от точки M до прямых $A'B'$ и AB равно $A'D'/AD = k$, поэтому таким же свойством обладает и любая точка прямой KM. Значит, центр подобия должен принадлежать KM. Аналогично показывается, что он принадлежит LN. Отсюда и следует, что $O = KM \cap LN$.

В [4] приведенный способ был использован для карт, лежащих на столе одной стороной, но он применим и в случае, когда перевернута ровно одна карта (рисунок 10, б), обоснование аналогично приведенному выше.

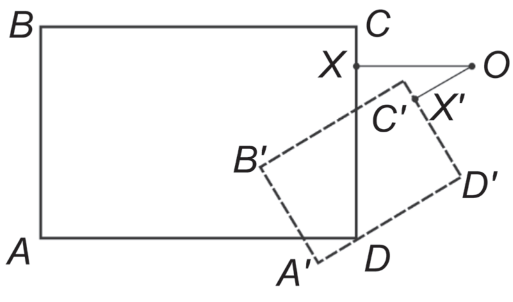


Рисунок 11 – Подобие с центром за пределом карт

Заключение. Таким образом, задача о ближайших соответственных точках решена для всех возможных существенно различных случаев расположения карт и соотношениях их масштабов. Отметим, что она в некотором смысле более интересна в сравнении с задачей о проколе ближайших точек, так как не требует наличия непустого пересечения карт. Полученные результаты могут быть использованы для организации научно-исследовательской работы учащихся и студентов, при подготовке к олимпиадам и научно-практическим конференциям.

Литература

1. *Канель-Белов, А. Я.* Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи ; под ред. В. О. Бугаенко. – 5-е изд., испр. – М. : Изд-во МЦНМО, 2009. – 94 с.
2. *Салтавец, С. А.* Неподвижные точки двух карт / С. А. Салтавец, В. С. Миналто // Прикладные вопросы точных наук : материалы V Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и преподавателей (АМТИ, г. Армавир, Россия, 30–31 ок-

References

1. *Kanel'-Belov, A. Ya.* Kak reshayut nestandartnye zadachi / A. Ya. Kanel'-Belov, A. K. Koval'dzhi ; pod red. V. O. Bugaenko. – 5-e izd., ispr. – M. : Izd-vo MCNMO, 2009. – 94 s.
2. *Saltavec, S. A.* Nepodvizhnye tochki dvuh kart / S. A. Saltavec, V. S. Minalto // Prikladnye voprosy tochnyh nauk : materialy V Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii studentov, aspirantov i prepodavatelej (AMTI, g. Armavir, Rossiya, 30–31 oktyabrya 2021 g.) / otv. red.

тября 2021 г.) / отв. ред. Л. А. Горовенко ; техн. ред. Е. В. Ковригина. – Армавир : РИО АГПУ, 2021. – С. 46–49.

3. *Гриб, Н. В.* Геометрические преобразования и задача о двух картах / Н. В. Гриб, К. А. Борисенко // Прикладные вопросы точных наук : материалы VI Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов, преподавателей (АМТИ, г. Армавир, Россия, 28–29 окт. 2022 г.) / науч. ред. Л. А. Горовенко ; отв. ред. О. П. Ровенская ; ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет». – Армавир : РИО АГПУ, 2022. – С. 12–15.
4. *Борисенко, К. А.* Построение неподвижной точки преобразований плоскости и задача о двух картах / К. А. Борисенко // Студенческая наука – инновационный потенциал будущего : сборник научных статей / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка ; редкол. А. В. Позняк [и др.]. – Минск : БГПУ, 2023. – С. 52–57.
5. *Атанасян, Л. С.* Геометрия : в 2 ч. / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986. – Ч. 1. – 336 с.

L. A. Gorovenko ; tekhn. red. E. V. Kovrigina. – Armavir : RIO AGPU, 2021. – S. 46–49.

3. *Grib, N. V.* Geometricheskie preobrazovaniya i zadacha o dvuh kartah / N. V. Grib, K. A. Borisenko // Prikladnye voprosy tochnyh nauk : materialy VI Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. studentov, aspirantov, prepodavatelej (AMTI, g. Armavir, Rossiya, 28–29 okt. 2022 g.) / nauch. red. L. A. Gorovenko ; otv. red. O. P. Rovenskaya ; FGBOU VO «Kubanskij gosudarstvennyj tekhnologicheskij universitet». – Armavir : RIO AGPU, 2022. – S. 12–15.
4. *Borisenko, K. A.* Postroenie nepodvizhnoj tochki preobrazovanij ploskosti i zadacha o dvuh kartah / K. A. Borisenko // Studencheskaya nauka – innovacionnyj potencial budushchego : sbornik nauchnyh statej / Belorus. gos. ped. un-t im. M. Tanka ; redkol. A. V. Poznyak [i dr.]. – Minsk : BGPU, 2023. – S. 52–57.
5. *Atanasyan, L. S.* Geometriya : v 2 ch. / L. S. Atanasyan, V. T. Bazylev. – M. : Prosveshchenie, 1986. – Ch. 1. – 336 s.