УДК 531

# О СРЕДНЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ ГАЗА

**И. И. Жолневерич,**
*кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры общей физики БГУ;*
**И. И. Жолневерич,**
*старший преподаватель кафедры общей физики БГУ;*
**А. Р. Филипп,**
*кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры общей физики БГУ*

Поступила в редакцию 30.06.2023.

UDC 531

# ABOUT THE AVERAGE VELOCITY OF GAS MOLECULES

**I. Zholnerevich,**
*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of General Physics, BSU;*
**I. Zholnerevich,**
*Senior Lecturer, Department of General Physics, BSU;*
**A. Philipp,**
*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of General Physics, BSU*

Received on 30.06.2023.

В молекулярно-кинетических соотношениях важную роль играет относительная скорость молекул газа. В статье предлагается точный метод нахождения характерных значений относительной скорости. Доказано, что движение центра тяжести и относительное движение молекул статистически независимы. Рассмотрены случаи как одинаковых, так и различных масс молекул. Полученное значение относительной скорости используется при расчете длины свободного пробега молекул.

*Ключевые слова*: скорость молекул, распределение Максвелла, относительное движение.

The relative speed of molecules plays an important role in molecular kinetic relationships. This article proposes an exact method of solving the equation for characteristic relative velocities of gas molecules. It is proved that the movement of the center of gravity and the relative movement of molecules are independent. The cases of both identical and different masses of molecules were considered. The obtained relative velocity value is used to calculate the free path of particles.

*Keywords:* velocity of gas molecules, Maxwell distribution, relative movement.

***Введение.*** Распределение Максвелла молекул по абсолютным скоростям изучается в курсе «Молекулярной физики» в вузе и является одним из важнейших разделов учебной программы. Математические выкладки, сопровождающие изложение данной темы, как правило, вполне логичны и понятны студентам. Однако такой ясности, к сожалению, нет в вопросе о распределении молекул по относительным скоростям. Тем не менее учет точного значения средней относительной скорости молекул требуется, например, при расчете длины свободного пробега, которая, в свою очередь, используется для получения коэффициентов диффузии, теплопроводности и вязкости.

***Основная часть.*** *Средняя относительная скорость движения молекул газа.* В классических учебниках по молекулярной физике часто используется соотношение (например, при выводе формулы для длины свободного пробега молекул газа):

$$\langle \upsilon_{om} \rangle = \sqrt{2} \langle \upsilon \rangle,$$

где $\langle \upsilon_{om} \rangle$ – средняя относительная скорость движения молекул газа, $\langle \upsilon \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул. Однако строгого доказательства данного соотношения авторы, как правило, не приводят. Тем не менее в этом простом уравнении, как будет видно из дальнейшего изложения, скрыт глубокий физический смысл, а его математическое обоснование позволяет более детально разобраться с такими базовыми понятиями, как приведенная масса, относительность движения, распределение молекул газа по скоростям, вероятность независимых событий.

Известно, что в состоянии термодинамического равновесия распределение молекул по скоростям описывается распределением Максвелла. Вероятность того, что молекула имеет скорость, лежащую в интервале от $\langle \upsilon \rangle$ до $\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}$ скоростного пространства (где $d\vec{\upsilon} = d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$ – элементарный объем скоростного пространства (рисунок 1)), имеет вид [1]:

$$dP(\vec{\upsilon}) = f(\vec{\upsilon})d\vec{\upsilon} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\vec{\upsilon},$$

где $m$ – масса молекулы, $T$ – температура газа, $k$ – постоянная Больцмана.

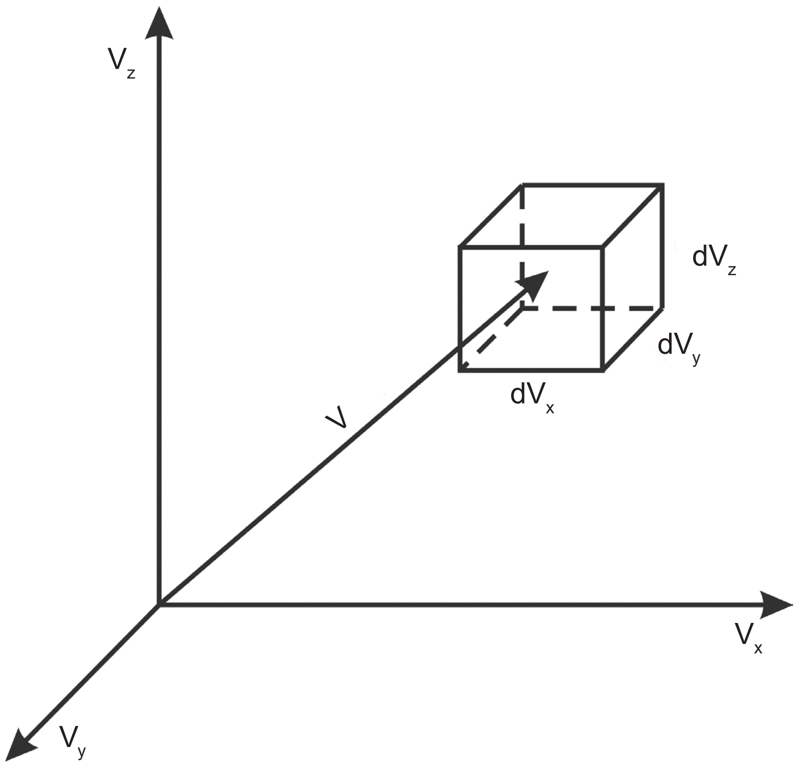


*Рисунок 1 – Элементарный объем скоростного пространства*

Выделим в газе две произвольные молекулы с массами $m_1$ и $m_2$, векторы скоростей которых лежат в интервалах $(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_1 + d\vec{\upsilon}_1)$ и $(\vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_2 + d\vec{\upsilon}_2)$, соответственно. События, состоящие в том, что одна молекула имеет скорость $\vec{\upsilon}_1$, а другая – $\vec{\upsilon}_2$, являются независимыми.

Поэтому, по теореме умножения вероятностей независимых событий, вероятность совместного события запишется так:

$$dP(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2) = dP(\vec{\upsilon}_1) \cdot dP(\vec{\upsilon}_2) = \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} e^{-\frac{m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2}{2kT}} d\vec{\upsilon}_1 d\vec{\upsilon}_2 \tag{1}$$

Для получения распределения по относительной скорости перейдем в (1) к новым переменным: скорости центра масс

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

и относительной скорости

$$\vec{\upsilon}_{om} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2. \tag{3}$$

Из (2) и (3) легко можно получить, что

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_c + \frac{\mu\vec{\upsilon}_{om}}{m_1} \quad \text{и} \quad \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_c - \frac{\mu\vec{\upsilon}_{om}}{m_2}, \tag{4}$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса.

При переходе к новым переменным произведение элементарных скоростных объемов преобразуется следующим образом:

$$d\vec{\upsilon}_1 d\vec{\upsilon}_2 = d\upsilon_{1x} d\upsilon_{1y} d\upsilon_{1z} d\upsilon_{2x} d\upsilon_{2y} d\upsilon_{2z} = |J| d\vec{\upsilon}_c d\vec{\upsilon}_{om} = |J| d\upsilon_{cx} d\upsilon_{cy} d\upsilon_{cz} d\upsilon_{omx} d\upsilon_{omy} d\upsilon_{omz}, \tag{5}$$

где якобиан преобразования J вычисляется как (см. [2])

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\upsilon_{1x}}{\partial\upsilon_{cx}} & \frac{\partial\upsilon_{1x}}{\partial\upsilon_{cy}} & \frac{\partial\upsilon_{1x}}{\partial\upsilon_{cz}} & \frac{\partial\upsilon_{1x}}{\partial\upsilon_{omx}} & \frac{\partial\upsilon_{1x}}{\partial\upsilon_{omy}} & \frac{\partial\upsilon_{1x}}{\partial\upsilon_{omz}} \\ \frac{\partial\upsilon_{1y}}{\partial\upsilon_{cx}} & \frac{\partial\upsilon_{1y}}{\partial\upsilon_{cy}} & \frac{\partial\upsilon_{1y}}{\partial\upsilon_{cz}} & \frac{\partial\upsilon_{1y}}{\partial\upsilon_{omx}} & \frac{\partial\upsilon_{1y}}{\partial\upsilon_{omy}} & \frac{\partial\upsilon_{1y}}{\partial\upsilon_{omz}} \\ \frac{\partial\upsilon_{1z}}{\partial\upsilon_{cx}} & \frac{\partial\upsilon_{1z}}{\partial\upsilon_{cy}} & \frac{\partial\upsilon_{1z}}{\partial\upsilon_{cz}} & \frac{\partial\upsilon_{1z}}{\partial\upsilon_{omx}} & \frac{\partial\upsilon_{1z}}{\partial\upsilon_{omy}} & \frac{\partial\upsilon_{1z}}{\partial\upsilon_{omz}} \\ \frac{\partial\upsilon_{2x}}{\partial\upsilon_{cx}} & \frac{\partial\upsilon_{2x}}{\partial\upsilon_{cy}} & \frac{\partial\upsilon_{2x}}{\partial\upsilon_{cz}} & \frac{\partial\upsilon_{2x}}{\partial\upsilon_{omx}} & \frac{\partial\upsilon_{2x}}{\partial\upsilon_{omy}} & \frac{\partial\upsilon_{2x}}{\partial\upsilon_{omz}} \\ \frac{\partial\upsilon_{2y}}{\partial\upsilon_{cx}} & \frac{\partial\upsilon_{2y}}{\partial\upsilon_{cy}} & \frac{\partial\upsilon_{2y}}{\partial\upsilon_{cz}} & \frac{\partial\upsilon_{2y}}{\partial\upsilon_{omx}} & \frac{\partial\upsilon_{2y}}{\partial\upsilon_{omy}} & \frac{\partial\upsilon_{2y}}{\partial\upsilon_{omz}} \\ \frac{\partial\upsilon_{2z}}{\partial\upsilon_{cx}} & \frac{\partial\upsilon_{2z}}{\partial\upsilon_{cy}} & \frac{\partial\upsilon_{2z}}{\partial\upsilon_{cz}} & \frac{\partial\upsilon_{2z}}{\partial\upsilon_{omx}} & \frac{\partial\upsilon_{2z}}{\partial\upsilon_{omy}} & \frac{\partial\upsilon_{2z}}{\partial\upsilon_{omz}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\mu}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\mu}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\mu}{m_1} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{m_2} \end{vmatrix} = -1.$$

Частные производные вычислены из векторных равенств (4), которые предварительно спроектированы на оси выбранной системы координат.

Нетрудно показать с учетом (4), что

$$m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2 = \left(m_1 + m_2\right)\upsilon_c^2 + \mu\upsilon_{om}^2. \tag{6}$$

Подставив (5) и (6) в (1), получим вероятность того, что выбранная пара молекул имеет скорость центра масс $\vec{\upsilon}_c$ и относительную скорость $\vec{\upsilon}_{om}$, лежащие в соответствующих интервалах скоростного пространства $d\vec{\upsilon}_c$ и $d\vec{\upsilon}_{om}$:

$$dP\left(\vec{\upsilon}_c, \vec{\upsilon}_{om}\right) = \left(\frac{m_1 + m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right) 2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\left(m_1 + m_2\right)\upsilon_c^2}{2kT}\right) \exp\left(-\frac{\mu\upsilon_{om}^2}{2kT}\right) d\vec{\upsilon}_c d\vec{\upsilon}_{om} \tag{7}$$

Откуда следует, что эта вероятность может быть представлена в виде произведения вероятности того, что выделенная пара молекул имеет скорость центра масс, лежащую в интервале $(\vec{\upsilon}_c, \vec{\upsilon}_c + d\vec{\upsilon}_c)$ скоростного пространства, и вероятности того, что их относительная скорость лежит в интервале $(\vec{\upsilon}_{om}, \vec{\upsilon}_{om} + d\vec{\upsilon}_{om})$.Таким образом, эти события можно считать независимыми и $dP(\vec{\upsilon}_c, \vec{\upsilon}_{om}) = dP(\vec{\upsilon}_c) \cdot dP(\vec{\upsilon}_{om})$, где

$$dP(\vec{\upsilon}_c) = \left(\frac{m_1 + m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_1 + m_2)\upsilon_c^2}{2kT}\right) d\vec{\upsilon}_c \tag{8}$$

$$dP(\vec{\upsilon}_{om}) = \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu\upsilon_{om}^2}{2kT}\right) d\vec{\upsilon}_{om} \tag{9}$$

Распределения (8) и (9), очевидно, являются распределениями Максвелла соответственно для скорости центра масс и относительной скорости двух молекул. Такой результат можно было бы ожидать, если вспомнить задачу двух тел из механики [3], в которой движение центра масс системы описывается как движение одного тела с суммарной массой, а относительное движение – как движение тела с массой, равной их приведенной массе.

Запишем соотношение (9) в сферической системе координат и проинтегрируем его по всем направлениям относительной скорости. В результате получим распределение Максвелла по абсолютному значению относительной скорости:

$$dP(\upsilon_{om}) = \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu\upsilon_{om}^2}{2kT}\right) \upsilon_{om}^2 d\upsilon_{om} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu\upsilon_{om}^2}{2kT}\right) \upsilon_{om}^2 d\upsilon_{om},$$

которое имеет такой же вид, как и распределение Максвелла для одной молекулы. Только вместо массы молекулы $m$ фигурирует приведенная масса $\mu$. Следовательно,

$$\langle \upsilon_{om} \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \qquad \upsilon_{k,om} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}} \qquad \upsilon_{в,om} = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}},$$

где $\langle \upsilon_{om} \rangle$ – средняя относительная скорость молекул, $\upsilon_{k,om} = \sqrt{\langle \upsilon^2 \rangle}$ – средняя квадратичная скорость относительного движения молекул, $\upsilon_{в,om}$ – наиболее вероятная относительная скорость.

Если массы молекул одинаковы $m_1 = m_2 = m$, то $\mu = \frac{m}{2}$, и $\langle \upsilon_{om} \rangle = \sqrt{\frac{8kT \cdot 2}{\pi m}} = \sqrt{2}\langle \upsilon \rangle$.

Аналогично, при необходимости, можно вычислить характерные скорости для центра масс молекул.

***Заключение.*** Предложен оригинальный метод нахождения средней относительной скорости молекул газа. Для этого использован формальный переход от скоростных координат $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ двух молекул к координатам $\vec{\upsilon}_{om}, \vec{\upsilon}_c$ – их относительной скорости и скорости центра масс.

Данный способ нахождения средней относительной скорости может быть использован преподавателями вузов при чтении курса «Молекулярная физика», поскольку опирается на тот математический аппарат, который, как правило, к этому времени уже известен студентам.

Показано, что распределения по относительным скоростям молекул и по скоростям центров масс являются статистически независимыми. Это может служить своеобразной иллюстрацией справедливости использования известного метода решения задачи двух тел применительно к движению молекул.

Полученное значение средней относительной скорости играет важную роль в молекулярной физике и позволяет, в частности, вычислять коэффициенты, описывающие явления переноса в идеальном и разреженном газе.

### Литература


1. *Матвеев, А. Н.* Молекулярная физика / А. Н. Матвеев. – М. : Оникс, 2006. – 360 с.
2. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корж. – М. : Книга по Требованию, 2014. – 832 с.
3. *Бугаенко, Г. А.* Основы классической механики / Г. А. Бугаенко, В. В. Маланин, В. И. Яковлев. – М. : Высшая школа, 1999. – 366 с.


### References


1. *Matveev, A. N.* Molekulyarnaya fizika / A. N. Matveev. – M. : Oniks, 2006. – 360 s.
2. *Korn, G.* Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov / G. Korzh. – M. : Kniga po Trebovaniyu, 2014. – 832 s.
3. *Bugaenko, G. A.* Osnovy klassicheskoj mekhaniki / G. A. Bugaenko, V. V. Malanin, V. I. Yakovlev. – M. : Vysshaya shkola, 1999. – 366 s.