МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2023. № 4. С. 11–15

УДК 517

РАВНОМЕРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Т. С. Мардвилко,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций БГУ

Поступила в редакцию 11.09.2023.

UDC 517

UNIFORM RATIONAL APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS WITH POWER-LOGARITHMIC SINGULARITY

T. Mardvilko,
PhD in Math, associate professor, associate professor of function theory department, BSU

Received on 11.09.2023.

В статье исследуются равномерные рациональные приближения функций со степенно-логарифмической особенностью и их четных продолжений. Доказательство базируется на методе, разработанном А. А. Пекарским для нахождения равномерных рациональных приближений функции Маркова, основанном на многоточечных аппроксимациях Паде.

Ключевые слова: рациональная аппроксимация, степенная функция, функция со степенно-логарифмической особенностью, четное и нечетное продолжение функции, функция Маркова.

Uniform rational approximations of functions with power-logarithmic singularities and their even extensions are studied in the article. The investigations are used the method developed by A. A. Pekarskii to find uniform rational approximations of the Markov function, based on multipoint Padé approximants.

Keywords: rational approximation, power function, function with power-logarithmic singularity, even and odd continuation of a function, Markov function.

Введение. Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C([a,b])$ – банахово пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b] \subset$ относительно стандартной нормы

$$\|f\|_{[a,b]} = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Через $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, обозначим множество действительных рациональных функций степени не выше *n*. Для $f \in C([a,b])$ введем наилучшее равномерное рациональное приближение, т. е.

$$R_n(f;[a,b]) = \inf\{\|f - r_n\|_{[a,b]} : r_n \in \mathcal{R}_n\}.$$

Пусть $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ и $a > 1$. Положим $g_{\alpha\beta}(x) = x^\alpha \ln^\beta \dfrac{a}{x}$ при $0 < x \le 1$ и $g_{\alpha\beta}(0) = 0$. Будем также рассматривать четное продолжение функции $f \in C([0,1])$: $f \in C([0,1])$: $f^+(x) = f(|x|)$, $x \in [-1,1]$.

Изучению наилучших равномерных рациональных приближений функции $g_{\alpha 0}$ посвящен ряд работ. Наиболее точные результаты получил Г. Шталь [1]. Именно им показано, что при $n \to \infty$ имеют место сильные асимптотики

$$R_n(g_{\alpha 0};[0,1]) \sim 2^{2\alpha+2} |\sin \pi\alpha| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad \alpha \notin \mathbb{N};$$

$$R_n(g^+_{\alpha 0};[-1,1]) \sim 2^{\alpha+2} \left|\sin \frac{\pi\alpha}{2}\right| e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad \frac{\alpha}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Основная часть. В случае $\beta \neq 0$ здесь будет доказана

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta \neq 0$. Для $R_n\left(g_{\alpha\beta};[0,1]\right)$ при $n \to \infty$ справедливы следующие слабые асимптотики

$$R_n\left(g_{\alpha\beta};[0,1]\right) \asymp n^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad \text{если } \alpha \notin \mathbb{N};$$

$$R_n\left(g_{\alpha\beta};[0,1]\right) \asymp n^{\frac{\beta}{2}} e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, \quad \text{если } \alpha \notin \mathbb{N};$$

Лемма 1. Для любого четного k и любых $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R},$ $a > 1$, $-a < u < 0$ существует дробь $r_k \in \mathcal{R}_k$ Чебышева – Маркова относительно отрезка [0,1] такая, что $\|r_k\|_{[0,1]} = 1,\ r_k(x) \geq 1$ при $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ и

$$|t|^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{a}{|t|} r_k^{-1}(t) \leq c k^{\frac{\beta}{2}} e^{-\pi\sqrt{2\alpha k}},\ -u \leq t < 0.$$

Здесь $c > 0$ и не зависит от k.

Лемма 1 относительно отрезка [–1, 1] для $\beta = 0$ имеется в [3, §4]. Для ее доказательства при $\beta \neq 0$ нужно дополнительно применить теорему 2 из [2].

Нам понадобится функция Маркова

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(t)}{t - z},\ \ z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu, \tag{1}$$

где μ – положительная борелевская мера с носителем $\operatorname{supp}\mu \subset [u,0]$ $-a < u < 0$. Мы предполагаем сходимость интеграла $\int |t|^{-1} d\mu(t)$.

Введем следующее обозначение

$$\lambda_n(\mu) = \inf \left\| r(x) \int \frac{d\mu(t)}{r(t)(t-x)} \right\|_{[0,1]},$$

где inf берется по всем положительным на [u, 0] рациональным функциям вида $r(x) = \dfrac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n}(x)}$, p_{2n+1} и q_{2n} – многочлены степеней $2n + 1$ и $2n$ соответственно и $q_{2n}(x) > 0$ для всех $x \leq 0$.

Теорема 2 [3]. Для наилучших рациональных приближений функции Маркова (1) и $n \in \mathbb{N}_0$, имеет место равенство

$$R_n\left(\hat{\mu};[0,1]\right) = \lambda_n(\mu).$$

Лемма 2 [3]. Пусть ν – положительная борелевская мера, $\operatorname{supp}\nu \subset [u,0]$, $u \in (-\infty, 0)$ и такая, что $\int |t|^{-1} d\nu < \infty$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$

$$R_m\left(\hat{\nu};[0,1]\right) \leq \frac{c}{m} \int |t|^{-1} d\nu,$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Теорема 3. Для наилучших рациональных приближений функции Маркова (1) с мерой μ, удовлетворяющей условию

$$d\mu(t) \asymp |t|^{\alpha} \ln^{\beta}\frac{a}{|t|}dt, \ \ t\in[u,0],$$

выполняется следующее слабое асимптотическое соотношение

$$R_n\left(\hat{\mu};[0,1]\right) \asymp n^{\frac{\beta}{2}} e^{-2\pi\sqrt{n\alpha}}, \ \ n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Верхние оценки в теореме 3 следуют из лемм 1, 2 и теоремы 2. Их доказательство аналогично доказательству верхних оценок из теоремы 2 работы [3]. Для получения нижних оценок нужно использовать метод двойственности Я. Э. Андерсона из [4].

Следующая лемма 3 доказывается так же, как аналогичная лемма из [4] с $\sigma = 0$

Лемма 3. Пусть $K\subset\mathbb{C}$ – континуум, функция h непрерывна на K, f аналитична на K, $\gamma>0$ и $\sigma\in\mathbb{R}$. Если $R_n(h,K)\asymp n^{\sigma}e^{-\gamma\sqrt{n}}$ при $n\in\mathbb{N}$, то и $R_n(h+f,K)\asymp n^{\sigma}e^{-\gamma\sqrt{n}}$ при $n\in\mathbb{N}$.

Для получения оценки для наилучших рациональных приближений четного продолжения функции $g_{\alpha\beta}$ мы будем использовать лемму 4. Она следует из критерия П. Л. Чебышева элемента наилучшего рационального приближения [5].

Лемма 4. Если $f\in C([0,1])$, то для любого $n\in\mathbb{N}_0$ справедливо равенство

$$R_{2n}\left(f\left(x^2\right);[-1,1]\right) = R_n\left(f(x);[0,1]\right).$$

Теорема 4. Для $\alpha>0$, $\beta\neq 0$ и $n\in\mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$R_n\left(f;[a,b]\right) = \inf\left\{\left\|f-r_n\right\|_{[a,b]} : r_n\in\mathcal{R}_n\right\}.$$

$$R_n\left(g^{+}_{\alpha\beta};[-1,1]\right) \asymp n^{\frac{\beta}{2}} e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \ \textit{если} \ \alpha\notin\mathbb{N}.$$

Доказательство. Докажем, например, второе соотношение. Согласно лемме 4 и теореме 1 имеем

$$R_{2n}\left(g_{\alpha\beta}\left(x^2\right);[-1,1]\right) \asymp n^{\frac{\beta}{2}} e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Заметим, что

$$g_{\alpha\beta}\left(x^2\right) = |x|^{2\alpha}\, 2^{\beta} \ln^{\beta}\frac{\sqrt{a}}{|x|}, \quad x\in[-1,1]\setminus\{0\}.$$

Поэтому, заменив в (2) $\sqrt{a}$ на a, получим

$$R_{2n}\left(g^{+}_{2\alpha,\beta};[-1,1]\right) \asymp n^{\frac{\beta}{2}} e^{-\pi\sqrt{2\alpha\cdot(2n)}}, \ \ n\in\mathbb{N}.$$

Заменив здесь 2α на α и $2n$ на n, получим утверждение теоремы 4.

Изложим сейчас схему доказательства основной теоремы 1. При применении леммы 2 и теоремы 3 будем считать $u = -(1 + a) / 2$. Через G обозначим область $|z|<|u|$ с разрезом по радиусу (u, 0]. Граница ∂G области G состоит из окружности $|z|=|u|$ и двух экземпляров отрезка [u, 0]: верхнего $[u, 0]^+$ и нижнего $[u, 0]^-$. Ориентируем границу ∂G в положительном направлении. Согласно интегральной формуле Коши получаем

$$g_{\alpha\beta}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{g_{\alpha\beta}(\xi)\,d\xi}{\xi-x},\ x\in[0,1]. \tag{3}$$

Через $g_{\alpha\beta}(\xi\pm i0)$ для $\xi\in[u,0]$ обозначим соответственно $\lim\limits_{t\to\pm0} g_{\alpha\beta}(\xi\pm it)$.

Из (3) получаем, что для $x\in[0,1]$

$$g_{\alpha\beta}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_u^0\frac{g_{\alpha\beta}(\xi+i0)-g_{\alpha\beta}(\xi-i0)}{\xi-x}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=|u|}\frac{g_{\alpha\beta}(\xi)\,d\xi}{\xi-x}=:h_{\alpha\beta}(x)+f_{\alpha\beta}(x).$$

Функция $f_{\alpha\beta}$ аналитична на [0,1]. Поэтому согласно лемме 3 нам достаточно оценить надлежащим образом $R_n\left(g_{\alpha\beta};[0,1]\right)$ Для этого необходимо исследовать поведение функции

$$\varphi_{\alpha\beta}(\xi):=g_{\alpha\beta}(\xi+i0)-g_{\alpha\beta}(\xi-i0)\ \textit{при}\ \xi\to-0.$$

при $\xi\to-0$. При этом следует учесть, что точка z = 0 для функции $g_{\alpha\beta}(z)=z^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{a}{z}$ является точкой ветвления из-за $\ln^{\beta}\frac{a}{z}$ при $\alpha\in\mathbb{N}$, а при $\alpha\notin\mathbb{N}$ из-за z^{α} и $\ln^{\beta}\frac{a}{z}$. Подобные рассуждения для z^{α} применяются в [3].

Заключение. В заключение отметим, что в работе [6] для функции $g_{0\beta}$, $\beta<0$, найдены наилучшие рациональные приближения ее четного и нечетного продолжений. Именно, для $n\in\mathbb{N}$ доказано, что

$$R_n\left(g_{0\beta};[0,1]\right)\asymp R_n\left(g_{0\beta}^{+};[-1,1]\right)\asymp n^{\beta-1};$$
$$R_n\left(g_{0\beta}^{-};[-1,1]\right)\asymp n^{\beta},$$

где через $g_{0\beta}^{-}$ мы обозначили нечетное продолжение функции $g_{0\beta}$:

$$g_{0\beta}^{-}(x)=g_{0\beta}(|x|)\operatorname{sign}x,\ x\in[-1,1].$$

Вопросы четного и нечетного продолжений функций обсуждались также в работах [7] и [8].

Полиномиальные приближения функции $g_{\alpha\beta}$ исследовались в [9].

Литература

1. *Stahl, H.* Best uniform rational approximation of x^{α} на [0,1] / H. Stahl // Acta Math. 190:2, 2003, p. 241–306.
2. *Ковалевская, Е. В.* Построение экстремальных произведений Бляшке / Е. В. Ковалевская, А. А. Пекарский // Веснік ГрДУ імя Я.Купалы, Серыя 2. – 2017. – Т.7. – № 1. – С. 6–13.
3. *Пекарский, А. А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А. А. Пекарский // Алгебра и анализ. Т. 7. – 1995. – Вып. 2. – С. 121–132.

References

1. *Stahl, H.* Best uniform rational approximation of x^{α} на [0,1] / H. Stahl // Acta Math. 190:2, 2003, p. 241–306.
2. *Kovalevskaya, E. V.* Postroenie ekstremal'nyh proizvedenij Blyashke / E. V. Kovalevskaya, A. A. Pekarskij // Vesnik GrDU imya Ya.Kupaly, Seryya 2. – 2017. – T.7. – № 1. – S. 6–13.
3. *Pekarskij, A. A.* Nailuchshie ravnomernye racional'nye priblizheniya funkcij Markova / A. A. Pekarskij // Algebra i analiz. T. 7. – 1995. – Vyp. 2. – S. 121–132.

4. *Andersson, J. E.* Rational approximation to function like x^{α} in integral norms / J. E. Andersson // Analysis Math., 1988, № 1, p. 11–25.
5. *Lorenz, G. G.* Constructive Approximation. Advanced Problems / G. G. Lorenz, M.v. Golitschek, Y. Makovoz // Springer-Verlag, New York, Berlin, Heildelberg, 1996.
6. *Мардвилко, Т. С.* Применение действительного пространства Харди – Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций / Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2022. – № 3. – С. 16–36.
7. *Мардвилко, Т. С.* Аппроксимация четного и нечетного продолжения функций / Т. С. Мардвилко // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа», Воронеж, 27 января – 1 февраля 2023 г. – С. 245–247.
8. *Мардвилко, Т. С.* Применения произведения Бляшке для оценки наилучших равномерных рациональных приближений четного и нечетного продолжений функций / Т. С. Мардвилко // Сборник трудов XVI Международной Казанской школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 22 – 27 августа 2023 г. – С. 152–154.
9. *Ибрагимов, И. И.* Об асимптотическом значении наилучшего приближения функций, имеющих вещественную особую точку / И. И. Ибрагимов // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946 г. – Т. 10, В. 5, С. 429–460.

4. *Andersson, J. E.* Rational approximation to function like x^{α} in integral norms / J. E. Andersson // Analysis Math., 1988, № 1, p. 11–25.
5. *Lorenz, G. G.* Constructive Approximation. Advanced Problems / G. G. Lorenz, M.v. Golitschek, Y. Makovoz // Springer-Verlag, New York, Berlin, Heildelberg, 1996.
6. *Mardvilko, T. S.* Primenenie dejstvitel'nogo prostranstva Hardi – Soboleva na pryamoj dlya issledovaniya skorosti ravnomernyh racional'nyh priblizhenij funkcij / T. S. Mardvilko, A. A. Pekarskij // Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika. – 2022. – № 3. – S. 16–36.
7. *Mardvilko, T. S.* Approksimaciya chetnogo i nechetnogo prodolzheniya funkcij / T. S. Mardvilko // Sovremennye metody teorii funkcij i smezhnye problemy: materialy mezhdunarodnoj konferencii «Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola», Voronezh, 27 yanvarya – 1 fevralya 2023 g. – S. 245–247.
8. *Mardvilko, T. S.* Primeneniya proizvedeniya Blyashke dlya ocenki nailuchshih ravnomernyh racional'nyh priblizhenij chetnogo i nechetnogo prodolzhenij funkcij / T. S. Mardvilko // Sbornik trudov XVI Mezhdunarodnoj Kazanskoj shkoly-konferencii «Teoriya funkcij, ee prilozheniya i smezhnye voprosy», Kazan', 22 – 27 avgusta 2023 g. – S. 152–154.
9. *Ibragimov, I. I.* Ob asimptoticheskom znachenii nailuchshego priblizheniya funkcij, imeyushchih veshchestvennuyu osobuyu tochku / I. I. Ibragimov // Izv. AN SSSR. Ser. matem., 1946 g. – T. 10, V. 5, S. 429–460.