be noted that in Currently, unfortunately, many teachers do not use in their activities workbooks.

Thus, it can be argued that the workbook is actually a teaching aid, which has its own special didactic apparatus, which contributes to the independent work of the student in mastering new material both in the classroom and at home. It can also be fruitfully used by students in preparation for tests and at the same time contribute to the formation of practical skills.

Bibliographic references

1. Alimov Sh.A., Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M.A.“Algebra ” 7-sinf uchun darslik “O’qituvchi” T: 2017-190 bet.
2. Haydarov B.Q. Matematika. 5-sinf uchun darslik..Toshkent-2020.
3. Mirzaahmedov M.A., Rahimqoriyev A.A., Ismoilov Sh.N.,To’xtaxodjayevaM.A.Matematika. 6-sinf uchun darslik. “O’qituvchi”nashriyot-matbaaijodiyuyi . T-2017.
4. Пойя Д. Математическое открытие. Решение задач, основные понятия и преподавания. Москва, “Наука”, 1976 г.

УДК 512.32, 373.167.1:51+51(075.3)

МЕТОД ЗАМЕНЫ ПРИ РЕШЕНИИ ВОЗВРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. С. Фролов

ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»

Москва (Российская Федерация)

Науч. рук. – Н. И. Фирстова, к.пед.н., доцент

REPLACEMENT METHOD FOR SOLVING RETURN EQUATIONS

D. S. Frolov

Moscow Pedagogical State University

Moscow (Russian Federation)

Scientific adviser – N. I. Firstova, Dr. PhD, Associate Professor

В статье рассматривается один из способов реализации метода замены переменной при решении возвратных уравнений. Даны определения возвратных уравнений четвертой и пятой степени. Приведены конкретные примеры решения уравнений данного вида.

The article discusses one of the ways to implement the variable replacement method – the solution of return equations. Definitions of the return equations of the fourth and fifth degree are given. Specific examples of solving equations of this type are given.

Ключевые слова: метод замены переменной; возвратные уравнения; симметрические уравнения

Key word: ariable replacement method; return equations; symmetric equations

Материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Одной из математических задач, вызывающих затруднения, является решение алгебраических уравнений высших степеней. Для успешного прохождения итоговой аттестации по математике, подготовки к математическим олимпиадам, обучения в профильном классе обучающиеся должны владеть различными приемами решения уравнений.

В статье Н.И. Фирстовой «Обучение решению алгебраических уравнений методом замены переменной» представлены основные методы решения уравнений: метод перехода от равенства, связывающего функции, к равенству, связывающему аргументы; метод замены переменной; метод разложения на множители; функционально-графический метод.

Метод замены переменной является самым распространённым из вышеперечисленных методов. Суть метода заключается в том, что путем замены некоторого входящего в уравнение выражения, содержащего переменную, исходное уравнение сводится к более простому [3].

Одним из видов уравнений, которые решаются введением новой переменной, являются возвратные уравнения. Как правило, в таких алгебраических уравнениях с целыми коэффициентами не представляется возможным найти корни уравнения среди делителей свободного члена.

Рассмотрим уравнение четвертой степени:

$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, где $a_0 \neq 0$ (1)

Уравнение (1) называется **возвратным уравнением четвертой степени**, если существует такое число λ, при котором коэффициенты уравнения, равноотстоящие от концов многочлена в левой части уравнения, удовлетворяют условиям:

$\frac{a_3}{a_1} = \lambda \neq 0, \frac{a_4}{a_0} = \lambda^2$.

Предписание к решению возвратных уравнений четвертой степени:

1. Разделить обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ ($x = 0$ – не корень).
2. Сгруппировать члены уравнения, равноотстоящие от концов многочлена в левой части.
3. Ввести замену $x + \frac{\lambda}{x} = t$ и решить уравнение относительно *t*.
4. Учитывая ограничения на *t*, выполнить обратную замену.
5. Записать ответ.

Пример 1. Решить уравнение [2]

$$3x^4 - 2x^3 - 31x^2 + 10x + 75 = 0.$$

Проверим, является ли уравнение возвратным:

$\frac{a_3}{a_1} = \frac{10}{-2} = -5, \frac{a_4}{a_0} = \frac{75}{3} = (-5)^2,$

следовательно, уравнение является возвратным.

Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$, получим

$$3x^2 - 2x - 31 + \frac{10}{x} + \frac{75}{x^2} = 0.$$

Сгруппируем

$$3\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{5}{x}\right) - 31 = 0.$$

Введем замену $x - \frac{5}{x} = t$, тогда $\left(x - \frac{5}{x}\right)^2 = t^2$ или $x^2 + \frac{25}{x^2} - 10 = t^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 + 10.$

Решим уравнение относительно переменной t и выполним обратную замену:

$$3t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \text{или} \left[\begin{array}{l} x - \frac{5}{x} = 1 \\ x - \frac{5}{x} = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 5 = 0 \\ 3x^2 + x - 15 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{181}}{6} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{181}}{6}, \frac{-1+\sqrt{181}}{6}$.

Уравнение называется **симметрическим**, если $\lambda = 1$. Симметрические уравнения являются частным случаем возвратных уравнений.

С увеличением степени возвратных уравнений представление выражений, содержащих переменную, через переменную t становится трудоемким.

Симметрические уравнения четной степени $k = 2n$ решаются делением обеих частей уравнения на $x^n \neq 0$ [1, с. 32].

Рассмотрим симметрическое уравнение восьмой степени.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^8 - 7x^7 + 4x^6 - 21x^5 + 6x^4 - 21x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 0 \;|: x^4 \neq 0$$

Поделим почленно на x^4, сгруппируем равноотстоящие члены, получим:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - 7\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

Введем замену $x + \frac{1}{x} = t, |t| \geq 2$ (согласно неравенству Коши)

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$t^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$$

$$t^4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = t^4 - 4t^2 + 2$$

В результате подстановки и преобразований получаем уравнение

$$\begin{cases} t^4 - 7t^3 = 0 \\ |t| \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3(t-7) = 0 \\ |t| \geq 2 \end{cases} \Rightarrow t = 7 \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{1}{x} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

Уравнение пятой степени имеет вид:

$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$, где $a_0 \neq 0$ (2)

Уравнение (2) называется **возвратным уравнением пятой степени**, если существует такое число λ, при котором коэффициенты уравнения, равноотстоящие от концов многочлена в левой части уравнения, удовлетворяют условиям: $\frac{a_3}{a_2} = \lambda \neq 0,\ \frac{a_4}{a_1} = \lambda^3,\ \frac{a_5}{a_0} = \lambda^5$.

Замечание: Любое возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -\lambda$.

Согласно следствию из теоремы Безу, разделим левую часть уравнения на $(x + \lambda)$, в результате получим возвратное уравнение четной степени.

Таким образом, замена переменной необходима при решении возвратных уравнений как четной, так и нечётной степени.

Приведем пример практико-ориентированной задачи, при решении которой возникает необходимость нахождения корней возвратного уравнения.

Задача. При изготовлении коробок для упаковки подарков применяется следующая технология: из квадратного листа картона со стороной *a* м вырезаются по углам одинаковые квадраты и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был равен $\frac{a^3}{16}$ м^3, и высота коробки была не менее *0,2a*?

Дано:

ABCD – квадрат,

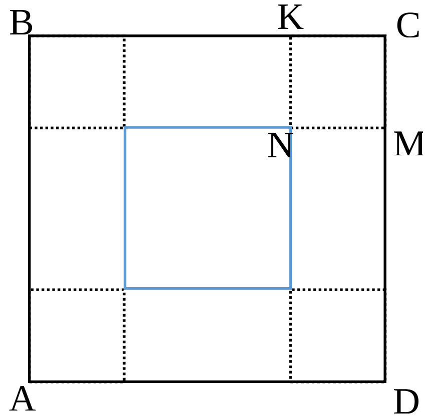
CMNK – квадрат

AB = *a*

$V = \frac{a^3}{16}$ м^3, где *V* – объем коробки

Найти: CM - ?

Решение:



Пусть *x* – сторона *CM* квадрата *CMNK*, тогда (*a* – 2*x*) – сторона основания коробки

$$(a-2x)^2 \cdot x = \frac{a^3}{16}, 0{,}2 \le x < \frac{a}{2}$$

$$64x^3 - 64ax^2 + 16a^2x - a^3 = 0$$

Данное уравнение является возвратным, т. к.

$$\frac{16a^2}{-64a} = -\frac{a}{4} = \lambda; \ \frac{-a^3}{64} = \left(-\frac{a}{4}\right)^3 = \lambda^3$$

$\lambda = -\frac{a}{4}$, тогда $x = \frac{a}{4}$ – корень уравнения.

В результате деления левой части уравнения на $\left(x - \frac{a}{4}\right)$, получаем

$$16x^2 - 12ax + a^2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{6a \pm 2\sqrt{5}a}{16} = \frac{(3 \pm \sqrt{5})a}{8}$$

Учитывая ограничения и условие задачи, $x = \frac{a}{4}$

Ответ: $\frac{a}{4}$ м.

Чтобы решать возвратные уравнения, обучающимся нужно уметь распознавать их и знать способы решения таких уравнений. Выполнение предписания по способу решения позволяет обучающимся осуществить переход к более простому уравнению с «новой» переменной.

Библиографические ссылки

1. Болтянский, В. Г. Симметрия в алгебре / В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. – М.: МЦНМО, 2002.– 240 с.

2. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 9 кл. с углубл. изучением математики / Н. Я. Виленкин, Г. С. Сурвилло, А. С. Симонов, А. И. Кудрявцев. – М.: Просвещение, 2001.– 384 с.

3. Фирстова, Н. И. Обучение решению алгебраических уравнений методом замены переменной / Н. И. Фирстова // Наука и школа. – 2019. – № 5. – С. 144–155.