4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 7-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.

5. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: доп. Параграфы к курсу алгебры 7-9 кл. – М.: Мнемозина, 2003. – 112 с.

6. Тарасевич А. К., Морозова Е. В. Особенности изучения основ теории вероятностей в школьном курсе математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». - 2016. - Т. 11. - С. 1951−1955. - URL: http://e-koncept.ru/2016/86416.htm. (дата обращения: 12.03.2023).

7. Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. — М.: МЦНМО: АО «Московские учебники», 2004. − 256 с.

8. Шутикова М.И., Матвеева В.А. Метод сквозных задач при формировании ИКТ-компетентности у будущих учителей начальных классов // Преподаватель XXI век. 2021. № 1. Часть 1. С. 133–140. - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metod-skvoznyh-zadach-pri-formirovanii-ikt-kompetentnosti-u-buduschih-uchiteley-nachalnyh-klassov (дата обращения: 16.03.2023).

9. Электронная онлайн библиотека. Раздел 4.3 Промышленность - URL: https://banauka.ru/5697.html (дата обращения: 12.03.2023).

УДК: 517.521.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ ПРИЗНАКА РААБЕ

К. С. Солдатов

УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»

Минск (Республика Беларусь)

Науч. рук. – Э. В. Шалик, к.ф.-м.н., доцент.

INVESTIGATION OF THE CONVERGENCE OF NUMERICAL SERIES USING THE RAABE SIGN

K. S. Soldatov

Belarussian State Pedagogical University Named after Maxim Tank

Minsk (Republic of Belarus)

Scientific adviser – E. V. Shalik, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor

В статье раскрывается возможность использования признака Раабе для исследования сходимости числовых рядов, изучение которого выходит за рамки содержания учебных дисциплин по математическому анализу, но посильно студентам.

The article reveals the possibility of using Raabe's test to study the convergence of number series, the study of which goes beyond the content of academic disciplines in mathematical analysis, but is feasible for students..

Ключевые слова: числовой ряд; сходимость; признаки сходимости; признак сходимости Раабе

Key words: numerical series; convergence; signs of convergence; Raabe convergence sign

При изучении числовых знакоположительных рядов обучающихся знакомят с четырьмя основными признаками сходимости (признак сравнения, признак Даламбера, признак Коши и интегральный признак), которые позволяют исследовать ряды на сходимость, но для исследования многих рядов этих признаков недостаточно.

Рассмотрим числовой ряд [1, с. 307]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{1}$$

Для исследования рядов, общий член которых содержит факториал, можно использовать признак Даламбера. Исследуем данный числовой ряд с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1.$$

Признак Даламбера не даёт ответ на вопрос о сходимости данного числового знакоположительного ряда. Неприменимы здесь и признак сравнения, признак Коши и интегральный признак. Значит, известных нам признаков недостаточно для исследования данного ряда. Сформулируем признак Раабе в предельной форме:

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – знакоположительный числовой ряд. Если $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$, то при $p>1$ он сходится, а при $p<1$ расходится. При $p=+\infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а если $p=1$, то для выяснения вопроса о его сходимости или расходимости следует применять другие признаки [2, с. 8].

Воспользуемся признаком Раабе для исследования ряда (1).

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}<1.$$

Значит, ряд (1) расходится по признаку Раабе.

Рассмотрим более сложные примеры, которые можно предлагать для исследования подготовленным обучающимся. Для их решения понадобится вспомнить некоторые теоретические сведения, к которым относятся бином Ньютона, понятие бесконечно малой величины и порядка малости, понятие знакоположительного числового ряда, умение находить пределы числовых последовательностей.

Определение. Для бесконечно малых величин α и β, если «отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ само оказывается бесконечно малым (а обратное отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ – бесконечно большим), то бесконечно малая β называется величиной высшего порядка, чем бесконечно малая α, и одновременно бесконечно малая α будет низшего порядка, чем бесконечно малая β» [4, с.136].

Если бесконечно малая β оказывается высшего порядка, чем бесконечно малая α, то этот факт записывают так: $\beta = o(\alpha)$ [4, с.137].

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^p$ [2, с. 26].

Ряд нельзя исследовать по четырём основным ранее указанным признакам, значит, применим признак Раабе:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^p\cdot\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right)^p=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p.$$

По формуле бинома Ньютона получим:

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{6(2n+1)^3}+\ldots. \qquad (2)$$

Заметим, что $\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{6(2n+1)^3}+\ldots$ высшего порядка малости, чем бесконечно малая $\frac{1}{n}$, тогда можем записать

$$\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{6(2n+1)^3}+\ldots=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Преобразуем выражение (2).

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p=1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{p}{2}.$$

Согласно признаку Раабе для $p>2$ исходный ряд сходится, для $p<2$ ряд расходится, а при $p=2$ вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Исследуем ещё один ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^{\alpha}\cdot\frac{1}{n^{\beta}}\ \text{[1, с. 307].}$$

При исследовании будем использовать признак Раабе, бином Ньютона и определение бесконечно малой величины высшего порядка малости.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^{\alpha}\cdot\frac{1}{n^{\beta}}.\left(\frac{(2n+4)!!}{(2n+3)!!}\right)^{\alpha}\cdot(n+1)^{\beta}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{\alpha}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{\alpha}{2n+3}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{\beta}{n}+\frac{\alpha}{2n+3}+\frac{\alpha\beta}{n(2n+3)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\beta+\frac{n\alpha}{2n+3}+\frac{\alpha\beta}{2n+3}\right)=\beta+\frac{\alpha}{2}.$$

Из полученного равенства делаем вывод, что при $\beta+\frac{\alpha}{2}>1$ исходный ряд сходится, при $\beta+\frac{\alpha}{2}<1$ исходный ряд расходится, а для случая, когда $\beta+\frac{\alpha}{2}=1$, вопрос о сходимости ряда остаётся открытым.

Приведем примеры числовых знакоположительных рядов, которые можно исследовать на сходимость с помощью предельного признака Раабе. Ряды расположены в порядке возрастания сложности их исследования:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{n!(n+3)9^{n}}$ [1, с.307];

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$, $x>0$ [3, с.276];

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\cdot\ldots\cdot(a+\sqrt{n+1})}$, $a>0$ [1, с.307];

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\cdot9\cdot\ldots\cdot(6n-3)}{4\cdot10\cdot\ldots\cdot(6n-2)}\right)^{\alpha}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}\right)^{\alpha}$, $a>0$, $b>0$ [1, с.307].

Таким образом, использование признака Раабе для исследования сходимости числовых рядов расширяет аналитические возможности студентов и не требует дополнительной подготовки при условии актуализации знаний о биноме Ньютона, понятии бесконечно малой величины, о порядке малости, понятии знакоположительного числового ряда и владения навыками вычисления пределов числовых последовательностей.

Библиографические ссылки

1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие/ Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с.

2. Справочное пособие по высшей математике. Т. 2: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Ч.1: Ряды: учеб. пособие / И. И. Ляшко [и др.]. — Изд. 7-е. — М.: ЛКИ, 2008. — 224 с.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник в 3-ч тт. Т. 2 — 10-е издание, стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2016. — 800 с.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник в 3-ч тт. Т. 1 — 11-е издание, стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2017. — 608 с.

УДК 372.851:51

СЮЖЕТНЫЕ ЗАДАЧИ, НАПРАВЛЕННЫЕ НА ФОРМИРОВАНИЕ ВНУТРИПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Т. Н. Супрунова
ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»
Москва (Российская Федерация)
Науч. рук. – Н. И. Фирстова, к.пед.н., доцент

PLOT TASKS AIMED AT THE FORMATION OF INTRA-SUBJECT CONNECTIONS IN THE COURSE OF MATHEMATICS

T. N. Suprunova
Moscow Pedagogical State University
Moscow (Russian Federation)
Scientific adviser – N. I. Firctova, PhD, Associate professor

Статья посвящена сюжетным задачам, которые направлены на установление внутрипредметных связей в курсе математики. В ней рассматриваются примеры задач, которые решаются с помощью средств геометрии.

The article is devoted to plot problems that are aimed at establishing intra-subject connections in the course of mathematics. It considers examples the problems that are solved using geometry tools.