УДК 372.851

МОТИВАЦИЯ ВВЕДЕНИЯ ВЕКТОРНОГО МЕТОДА В ШКОЛЬНЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

М. А. Савкина
ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»
Москва (Российская Федерация)
Науч. рук. – Н. И. Фирстова, к.пед.н., доцент

MOTIVATION FOR THE INTRODUCTION OF THE VECTOR METHOD IN THE SCHOOL GEOMETRY COURSE

M. A. Savkina
Moscow Pedagogical State University
Moscow (Russian Federation)
Scientific adviser – N. I. Firstova, Dr. PhD, Associate professor

В статье рассматриваются теоремы, доказательства которых с использованием векторного аппарата являются более простыми и доступными для учащихся, чем доказательства с использованием других математических методов, что обуславливает мотивацию введения векторного метода в школьном курсе геометрии.

The article deals with theorems whose proofs using the vector apparatus are simpler and more accessible to students than proofs using other mathematical methods, which reason the introduction of the vector method in the school geometry course.

Ключевые слова: вектор; векторный метод; мотивация введения векторного метода
Key words: vector; vector method; motivation for the introduction of the vector method

Понятие вектора является одним из фундаментальных понятий современной математики. Большая наглядность и простота векторных операций позволяют использовать элементы векторной алгебры в школе, в курсах математики и физики.

С помощью аппарата векторной алгебры могут быть решены содержательные геометрические и алгебраические задачи, причём их векторные решения часто значительно проще и эффективнее решений средствами элементарной геометрии. Именно это является одной из главных мотиваций изучения векторов в школе – иллюстрация лаконичных доказательств.

Как утверждал А.А. Столяр: «При использовании векторного аппарата мы должны придерживаться такого принципа: его применение оправдано лишь в том случае, когда оно приводит к более простым и изящным доказательствам теорем и решениям задач, чем при использовании других средств» [6, с.337].

Приведём три примера целесообразного использования аппарата векторной алгебры при доказательстве теорем школьного курса геометрии.

Теорема о средней линии треугольника в школьных учебниках геометрии доказывается при помощи следующих методов: метода цепочки треугольников, а именно, в учебнике Л.С. Атанасяна и др. [1, с. 146], и метода дополнительных построений, в частности, в учебнике А.В. Погорелова [5, с. 79], однако в учебнике Л.С. Атанасяна и др. [1, с. 213] в качестве задачи предложено доказать теорему векторным методом. И это доказательство, на наш взгляд, является более простым, чем те, которые представлены в описанных выше учебниках.

Теорема 1. *Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*

Дано:

ΔABC; DE – средняя линия ($AD = DB,\ BE = EC$)

Доказать:

$AC||DE$; $DE = \frac{1}{2}AC$

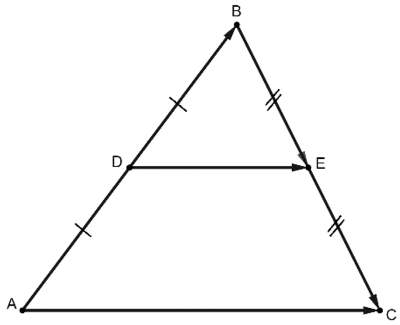

Рис. 1 – Чертеж к доказательству теоремы о средней линии треугольника

Доказательство:

Таблица 1. – Доказательство теоремы 1

Утверждение	**Обоснование**
1. Введем векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BE}$	
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$	Пункт 1, правило сложения векторов (правило треугольника) для ΔABC
3. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}$	Пункт 1, правило сложения векторов (правило треугольника) для ΔDBE
4. $AB = AD + DB; CB = CE + EB;$ $AB = DB + DB; CB = BE + BE;$ $AB = 2DB; BC = 2BE$	Аксиома измерения отрезков, условие, тождественное преобразование, вычисление
5. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DB}$ – сонаправленные; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BE}$ – сонаправленные	Пункт 1; определение сонаправленных векторов
6. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$ $\overrightarrow{DB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$	Пункты 4, 5; определение равных векторов; тождественное преобразование
$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	Пункты 2, 3, 6; тождественные преобразования
7. $AC||DE; DE = \frac{1}{2}AC$	Пункт 7; определение равных векторов

Классическое доказательство одной из основных теорем планиметрии – теоремы косинусов – основано на методе цепочки треугольников [3, с. 76–78]. Однако доказательство этой теоремы с использованием векторного метода, представленное, в частности, в учебнике А.В. Погорелова [5, с.173], является одним из самых компактных.

Теорема 2 (Теорема косинусов). *Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*

Докажем теорему для одной из сторон. Для других доказывается аналогично.

Дано:
ΔABC

Доказать:
$CB = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{AB, AC})$

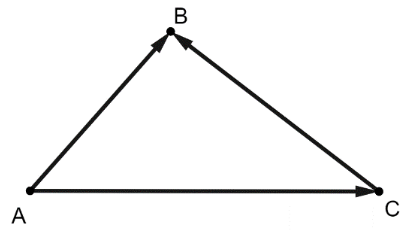

Рис. 2 – Чертеж к доказательству теоремы косинусов

Доказательство.

Таблица 2. – Доказательство теоремы 2

Утверждение	**Обоснование**
1. Введем векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$	
2. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$	Пункт 1, правило вычитания векторов для ΔABC
3. $(\overrightarrow{CB})^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$	Пункт 2; тождественное преобразование
4. $\overrightarrow{CB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$	Пункт 3; формула сокращенного умножения (квадрат разности)
5. $\overrightarrow{CB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cdot \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + \overrightarrow{AC}^2$	Пункт 4; свойство скалярного произведения векторов
6. $\lvert\overrightarrow{CB}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 - 2 \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cdot \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + \lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2$	Пункт 5; свойство скалярного произведения векторов (скалярный квадрат)
7. $CB^2 = AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{AB, AC}) + AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cdot \cos(\widehat{AB, AC})$	Пункт 6; определение длины вектора, коммутативность сложения

Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости, представленное во многих школьных учебниках, является одним самых сложных в школьном курсе геометрии. В частности, в учебнике Л.С. Атанасяна и др. [2, с.36-37] теорема доказывается методом цепочки треугольников, что приводит к большому объему рассуждений и громоздкому чертежу (рисунок 3).

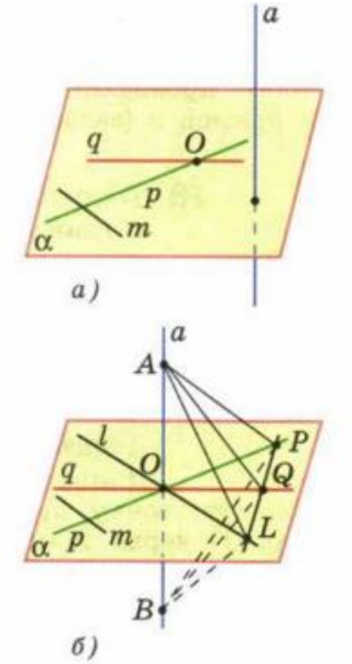

Рис. 3 – Чертеж к доказательству признака перпендикулярности прямой и плоскости, представленному в учебнике Л.С. Атанасяна и др. [2, с.37]

В учебнике В.М. Клопского, З.А. Скопеца, М.И. Ягодовского представлено изящное доказательство данной теоремы с использованием векторного метода [4, с.67].

Теорема 3. *Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*

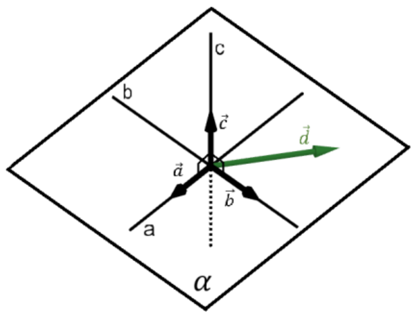

Рис.4 - Чертеж к доказательству признака перпендикулярности прямой и плоскости

Дано:

α; a; b; c; $c \not\subset \alpha; a, b \subset \alpha$;

$c \perp a; c \perp b$; $a \cap b = M$

Доказать:

$c \perp \alpha$

Доказательство.

Таблица 3. – Доказательство теоремы 3

Утверждение	Обоснование
1. Введем векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	
2. Пусть $\vec{d}$ – произвольный вектор плоскости α ($\vec{d} \subset \alpha$)	Дополнительное построение
3. $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$	Пункты 1,2; разложение вектора по двум неколлинеарным векторам
4. $\vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{c}(x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b})$ $\vec{c} \cdot \vec{d} = x \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} + y \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ $\vec{c} \cdot \vec{d} = x \cdot 0 + y \cdot 0$ $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$	Пункт 3; условие; свойства скалярного произведения
5. $\vec{c} \perp \vec{d}$	Пункт 4; свойство скалярного произведения
6. $c \perp \alpha$	Пункты 2, 5.

Итак, в школьном курсе геометрии содержатся теоремы, доказательства которых с использованием векторного аппарата являются более наглядными и изящными, чем с использованием иных математических методов. Возможность рассмотрения этих лаконичных доказательств служит мотивацией введения векторов в школьный курс геометрии.

Библиографические ссылки

1. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян [и др.]. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

2. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян [и др.]. – 22-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с.

3. Евклид. Начала Евклида / Евклид; пер. Д. Д. Мордухай-Болтовский. – Москва; Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – Книги 1-6. – 447 с.

4. Клопский, В.М. Геометрия. Учебное пособие для 9 и 10 класса средней школы / В. М. Клопский, З. А. Скопец, М. И. Ягодовский; под ред. З.А. Скопеца. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1978. – 255 с.

5. Погорелов, А. В. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

6. Столяр, А. А. Педагогика математики. / А. А. Столяр — 3-е изд., перераб. и доп. — Минск : Вышэйшая школа, 1986. — 416 с.