372.851:514.11:518.28

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

А. В. Панфилова
ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»
Москва (Российская Федерация)
Науч. рук. – Н. И. Фирстова, к.пед.н., доцент

SOLVING TRIGONOMETRIC INEQUALITIES BY THE FUNCTIONAL METHOD

A. V. Panfilova
Moscow Pedagogical State University
Moscow (Russian Federation)
Scientific adviser – N. I. Firstova, Dr. PhD, Associate professor

Статья посвящена теме «Решение тригонометрических неравенств функциональным методом». В ней рассматривается область применения тригонометрических неравенств, классификация тригонометрических неравенств по методам и способам их решения; рассмотрен функциональный метод решения тригонометрических неравенств.

The article is devoted to the topic "Solution of trigonometric inequalities by the functional method". It considers the scope of trigonometric inequalities, the classification of trigonometric inequalities according to methods and ways of solving them. The functional method for solving trigonometric inequalities will also be considered in more detail.

Ключевые слова: тригонометрия; тригонометрические неравенства; методы и способы решения тригонометрических неравенств; функциональный метод

Key words: trigonometry; trigonometric inequalis; methods and methods for solving trigonometric inequalities; functional method

«Тригонометрические неравенства» – одна из тем области математики, которая требует от обучающихся не только знаний по тригонометрии, но и умений решения алгебраических неравенств. В данной статье мы продемонстрируем область практического применения тригонометрических неравенств, рассмотрим классификацию неравенств по методам и способам их решения и более подробно рассмотрим функциональный метод решения тригонометрических неравенств.

Одним из ведущих экспертов и исследователей в данной области является известный математик и методист Александр Григорьевич Мордкович. Он является автором книг, учебных пособий, а также школьных учебников. В его трудах можно найти не только структурированную теорию, но и множество практических заданий по тригонометрии. Так, в его школьных учебниках представлено большое количество тригонометрических неравенств, которые обучающийся может использовать для закрепления умения решения неравенств.

Тригонометрические неравенства находят применение в физике, медицине, инженерии, экономике. Тригонометрические неравенства помогают оценить угол наклона тел относительно линии горизонта, периодичность колебания маятника или же угол его отклонения и т.п.

Примером применения тригонометрических неравенств в физике является следующая задача.

Задача. Тяжелое тело весом P находится на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Коэффициент трения между данным телом и плоскостью – f. При каких значениях угла α данное тело будет: а) двигаться по плоскости вниз и б) находиться в равновесии [8, с. 38]?

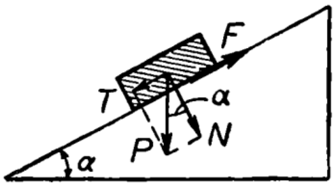

Рис.1 Тяжелое тело на наклонной плоскости.

Решение: сила веса P раскладывается на параллельную и перпендикулярную к наклонной плоскости составляющие: $T = P \cdot \sin\alpha$, $N = P \cdot \cos\alpha$.

Сила трения вычисляется по формуле $F = Nf = Pf \cdot \cos\alpha$.

а) зная условие движения $T > F$, перейдем к тригонометрическому неравенству $P \cdot \sin\alpha > Pf \cdot \cos\alpha$. Разделив обе части неравенства на $\cos\alpha \neq 0$, получим $\operatorname{tg}\alpha > f$.

б) условие равновесия имеет вид $T \leq F$. Тогда $P \cdot \sin\alpha \leq Pf \cdot \cos\alpha$.

Разделим обе части неравенства на $\cos\alpha \neq 0$. Получим $\operatorname{tg}\alpha \leq f$.

Ответ: а) $\operatorname{tg}\alpha > f$, б) $\operatorname{tg}\alpha \leq f$.

Однако, несмотря на практическое применение, данная тема не находит должного отображения в учебных программах. В результате, во многих школьных учебниках представлены только простейшие неравенства, количество задач повышенной сложности невелико, в некоторых учебниках тема «Тригонометрические неравенства» рассматривается в качестве дополнительного более сложного материала.

Для того, чтобы обучить школьников данной теме, целесообразно выделить классификацию по методам и способам решения тригонометрических неравенств:

1. Простейшие тригонометрические неравенства.
2. Тригонометрические неравенства, сводящиеся к простейшим.
3. Тригонометрические неравенства, решаемые методом замены.

4. Тригонометрические неравенства, решаемые методом разложения на множители.
5. Тригонометрические неравенства, решаемые функциональным методом.

Начиная с 8 класса, ученики решают различные неравенства: сначала алгебраические, а в старшей школе и тригонометрические. В процессе обучения они изучают различные методы решения уравнений и неравенств. В данной статье рассмотрим наиболее интересный метод решения – функциональный.

Функциональный метод – это мощный инструмент для решения математических задач, и знание его основ позволяет значительно упростить процесс решения многих уравнений и неравенств. Особенно применим данный метод к неравенствам, которые сложно решить другими методами.

Покажем, что этот метод используется при решении не только уравнений, но и неравенств. Его суть заключается в использовании свойств соответствующих функций. В данном случае – тригонометрических.

К сожалению, неравенств, решаемых функциональным методом, не так много. Но тем не менее можно выделить следующую типологию.

1. Применение области значений тригонометрических функций.
2. Применение области значений тригонометрических и алгебраических функций.

При применении 1 или 2 способа зачастую происходит переход от тригонометрического неравенства к системе тригонометрических уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство:

$$\sin x + \cos 5x \leq 3.$$

Решение: область значений тригонометрических функций, входящих в левую часть неравенства: $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos 5x \leq 1$.

Сложим два двойных неравенства, воспользовавшись свойством числовых неравенств: $-2 \leq \sin x + 5\cos x \leq 2$.

Так как областью определения $\sin x$ и $\cos x$ является любое число, при любом значении x выражение $\sin x + \cos 5x \in [-2; 2]$, а значит, меньше 3.

Ответ: $x \in \mathbb{R}$.

При решении данного неравенства мы использовали область значений тригонометрических функций, поэтому оно относится к первому пункту классификации.

Для решения уравнений функциональным методом справедливо следующее утверждение. Если наибольшее значение функции $y = f(x)$ на промежутке X равно A, а наименьшее значение функции $y = g(x)$ на том же промежутке равно A, то на промежутке X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases} \quad [3, \text{с}. 181]$$

Переформулируем его для неравенств. Пусть $f(x) \leq g(x)$, где $f(x), g(x)$ – тригонометрические функции. Если наибольшее значение функции $y = g(x)$ равно наименьшему значению функции $y = f(x)$, то есть $g_{max}(x) = f_{min}(x) = A$, то данное неравенство можно переписать в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} g(x) = A, \\ f(x) = A. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство, решение которого основывается на переходе к системе уравнений за счет области значений тригонометрических функций, области значений квадратичной функции, свойств числовых неравенств.

Пример 2. Решить неравенство:

$$\cos x \geq x^2 - 2x + 2.$$

Решение: из области значений $\cos x$: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Правая часть неравенства преобразуется: $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$.

Тогда запишем условие и ограничения на функции в систему:

$$\begin{cases} \cos x \leq 1, & (1) \\ x^2 - 2x + 2 \geq 1, & (2) \\ \cos x \geq x^2 - 2x + 2. & (3) \end{cases}$$

Из неравенств (2) и (3) можно сделать вывод, что $\cos x \geq 1$. Значит,

$$\begin{cases} \cos x \leq 1, \\ \cos x \geq 1. \end{cases}$$

С учетом области значений $\cos x : \cos x = 1$.

Предыдущая система неравенств сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ (x-1)^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 1. \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

Ответ: решений нет.

Во втором примере мы рассматривали не только область значений тригонометрической функции, но и область значений квадратичной (алгебраической) функции, поэтому данное неравенство можно отнести ко второму пункту классификации тригонометрических неравенств, решаемых функциональным методом.

Пример 3. Решить неравенство:

$$\sin x + 2\sin 5x \geq 4 - \cos 4x.$$

Решение: перепишем неравенство следующим образом:

$$\sin x + \cos 4x + 2\sin 5x \geq 4.$$

Значения входящих в неравенство тригонометрических функций не превышают единицу, то есть $\sin x \leq 1, \cos 4x \leq 1, \sin 5x \leq 1,\ 2\sin 5x \leq 2$.

Используя свойства числовых неравенств, сложим неравенства: $\sin x + \cos 4x + 2\sin 5x \leq 4$. Требование с учетом условия и ограничений выполняется только в том случае, когда $\sin x + \cos 4x + 2\sin 5x = 4$.

Неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1, \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$$

Решение первого уравнения системы $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет двум другим уравнениям системы.

Действительно,

$$\cos(2\pi + 8\pi k) = 1.$$

$$1 = 1 - \text{верно}.$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 10\pi k\right) = 1.$$

$$1 = 1 - \text{верно}.$$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ – решение системы и решение исходного неравенства.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Особенность данного неравенства заключается в нахождении общего решения системы. Множество решений одного уравнения должно удовлетворять множеству решений остальных уравнений системы. Только после этого можно записать ответ.

Изучение функционального метода при решении тригонометрических неравенств позволяет упростить процесс решения задач. Функциональный метод основан на использовании свойств функций. Он является универсальным методом для решения широкого класса математических задач. Изучение функционального метода также развивает логическое мышление и умение анализировать сложные математические модели. Поэтому знание данного метода полезно для учебы, повышения математической грамотности и применения в жизненных ситуациях.

Библиографические ссылки

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

2. Бородуля, И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства: книга для учителя / И.Т. Бородуля. – М.: Просвещение, 1989. – 239 с.

3. Мордкович, А.Г. Беседы с учителями математики / А.Г. Мордкович. – 2-е изд. – М.: Мир и Образование, 2005. – 336 с.

4. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2020. Ч. 1. – 457 с.

5. Новоселов, С.И. Руководство по преподаванию тригонометрии: пособие для учителей / С.И. Новоселов. – М.: Просвещение РСФСР, 1958. – 184 с.
6. Потапов, М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции: учебное пособие / М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко; под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 2001. – 735 с.
7. Фалин, Г.И. Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г.И. Фалин. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 327 с.
8. Шкарин, А.Б. Алгебраические задачи в технике (сборник задач) / А.Б. Шкарин, А.М. Федянов, Б.Г. Сандлер. – М.: УЧПЕДГИЗ, 1962. – 116 с.

УДК 373.5

РАЗЛИЧНЫЕ МОДЕЛИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ФИГУР ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

Д. В. Паплёвка
УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»
Минск (Республика Беларусь)
Науч. рук. – О. Н. Пирютко, к.п.н., доцент
D. V. Paplyovka
Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank"
Minsk (Republic of Belarus)
Scientific adviser – O. N. Pirutko, Ph.D., Associate Professor

В статье приводятся примеры, демонстрирующие важность построения правильного чертежа при решении стереометрических задач как средства формирования математической грамотности обучаемых.

The article provides examples demonstrating the importance of constructing a correct drawing when solving stereometric problems as a means of developing students’ mathematical literacy.

Ключевые слова: решение стереометрических задач, чертеж, изображение, параллельное проектирование
Key words. solving stereometric problems, drawing, image, parallel design

Стереометрия является одним из объективно сложных разделов школьного курса математики, при изучении которого учителю приходится преодолевать субъективные трудности учащихся, связанные с различными уровнями развития пространственных представлений.

Одной из составляющих математической грамотности учащихся является умение моделировать ситуацию, а также умение представлять информацию