

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛИ ДВУЧЛЕНОВ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

А. Д. Байдалов, В. Я. Ганаков

ГУО «Средняя школа №203 г. Минска»

Минск (Республика Беларусь)

Науч. рук. – О. А. Терешко, магистр

A GRAPHIC METHOD FOR SOLVING EQUATIONS AND INEQUALITIES CONTAINING MODULES OF BINOMIALS OF THE FIRST DEGREE WITH ONE VARIABLE

A. D. Baidalov, V. Y. Ganakov

State Educational Institution Secondary school №203 of Minsk

Minsk (Republic of Belarus)

Scientific adviser. – O. A. Tereshko, master

Работа посвящена применению графиков функций при решении уравнений и неравенств, содержащих модули двучленов первой степени с одной переменной. Актуальность исследования обусловлена необходимостью умения решать уравнения и неравенства с модулем при выполнении олимпиадных заданий и заданий повышенного уровня сложности.

The work is devoted to the use of function graphs in solving equations and inequalities containing modules of binomials of the first degree with one variable. The relevance of the study is due to the need to be able to solve equations and inequalities with the module when performing Olympiad tasks and tasks of an increased level.

Ключевые слова: модуль, график, уравнение, неравенство

Key words: module, graph, equation, inequality

При выполнении заданий на факультативных занятиях по математике мы столкнулись с уравнениями и неравенствами, содержащими переменную под знаком модуля. В пособиях для факультативных занятий «Школа юных математиков» (7 и 8 классы) представлены теоретические факты и задания на применение графического способа решения линейных уравнений и неравенств [1–2].

На основании изученных материалов на первом этапе работы мы построили графики функций, содержащих один двучлен (одночлен) первой степени с одной переменной под знаком модуля. Используя определение понятия модуля числа [3, с. 184] и правила построения графиков функций $y = f(x \pm a)$, $y = f(x) \pm b$ [4, с. 226], построили графики следующих функций: $y = |x|$, $y = |x - 2|$, $y = |x + 6|$, $y = |x| + 5$, $y = |x| - 6$.

Далее рассмотрели графики функций, которые содержат несколько слагаемых в виде модулей двучленов первой степени с одной переменной. Графики функций вида

$$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{n-1}| + |x - a_n|, \quad a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

строили с помощью нулей выражений, стоящих под знаком модуля и двух значений аргумента (одно меньше a_1 и второе больше a_n).

Например, $y = |x - 2| + |x - 6|$, $y = |x - 3| + |x - 4| + |x + 2|$,

$y = |x - 2| + |x - 1| + |x + 1| + |x + 2|$,

$y = |x - 3| + |x - 2| + |x - 1| + |x| + |x + 2|$.

Второй этап работы состоял из заданий, в которых необходимо решить уравнение, используя графики соответствующих функций.

Задание 1. Решите уравнения:

а) $|x - 2| + |x - 6| = 6$; б) $|x - 2| + |x - 6| = 4$; в) $|x - 2| + |x - 6| = 2$.

Решение: рассмотрим функции $f(x) = |x - 2| + |x - 6|$ и $g(x) = a$, где a равно 6, 4 или 2.

Построим графики данных функций (рисунок 1).

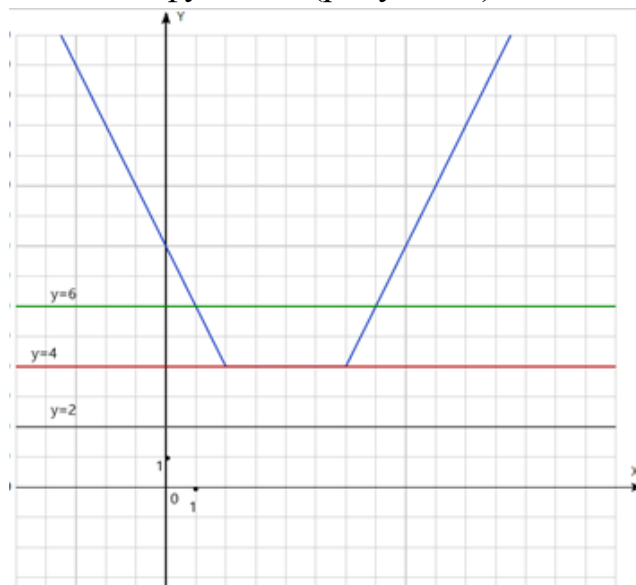


Рис. 1 – графики уравнений задания 1.

Ответ: а) 1 и 7; б) [2; 6]; в) нет решений.

Выполнив анализ графика при различных значениях параметров a , b , c в уравнении вида $|x - a| + |x - b| = c$, $a < b$, мы пришли к выводам:

- 1) если $c > |b - a|$, то уравнение имеет два корня;
- 2) если $c = |b - a|$, то уравнение имеет множество решений $[a; b]$;
- 3) если $c < |b - a|$, то уравнение не имеет решений.

Полученные выводы позволяют устно выполнять следующие задания.

1. Решите уравнения $|x + 2| + |x - 3| = 5$,

Решение: $a = -2$, $b = 3$, $c = 5$. $c = |3 - (-2)|$, значит, $x \in [-2; 3]$.

Ответ: $[-2; 3]$.

2. Определите количество корней уравнения $|x - 12| + |x + 8| = 15$.

Решение: $a = 12$, $b = -8$, $c = 15$. $c < |12 - (-8)|$, значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Рассмотрим задания, которые содержат разное количество слагаемых в виде модулей двучленов первой степени с одной переменной.

Задание 2. Определите количество решений уравнения

$|x + 2| + |x - 3| + |x - 4| = a$ в зависимости от значения параметра a .

Решение: рассмотрим функции $f(x) = |x + 2| + |x - 3| + |x - 4|$ и $g(x) = a$.

Построим графики данных функций.

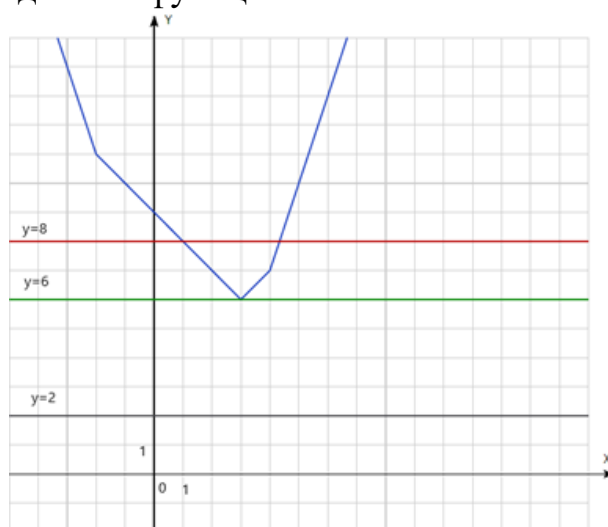


Рис. 2 – графики уравнений задания 2.

Ответ: если $a \in (-\infty; 6)$, нет решений;

$a=6$, 1 корень;

$a \in (6; +\infty)$, 2 корня.

Задание 3. Определите количество решений уравнения

$|x + 2| + |x + 1| + |x - 1| + |x - 2| = a$ в зависимости от значения параметра a .

Решение: рассмотрим функции $f(x) = |x + 2| + |x + 1| + |x - 1| + |x - 2|$ и $g(x) = a$.

Построим графики данных функций.

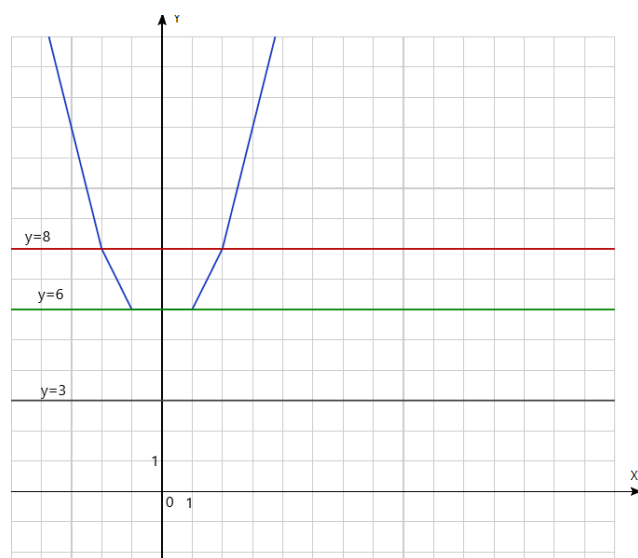


Рис. 3 – графики уравнений задания 3.

Ответ: если $a \in (-\infty; 6)$, нет корней; $a = 6$, бесконечно много корней;
 $a \in (6; +\infty)$, два корня.

Решение аналогичных уравнений позволяет выдвинуть гипотезы, что:

1) если количество слагаемых в левой части уравнения четное, то уравнение

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{n-1}| + |x - a_n| = b, (b > 0),$$

$a_1 < a_2 < \dots < a_n$ может иметь 2 корня, бесконечное множество решений или не иметь корней. Количества промежутков графика функции (левой части уравнения) на 1 больше, чем количество слагаемых в левой части уравнения. Значит будет средний промежуток, на концах которого значения функции равны. Ордината точек этого промежутка (на котором уравнение имеет множество решений) определяется по формуле

$$y = (a_n + a_{n-1} + \dots + a_{\frac{n}{2}+1}) - (a_{\frac{n}{2}} + \dots + a_2 + a_1), \left[\frac{a_n}{2}; \frac{a_{\frac{n}{2}+1}}{2} \right].$$

2) если количество слагаемых нечетное, то уравнение

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{n-1}| + |x - a_n| = b, (b > 0),$$

$a_1 < a_2 < \dots < a_n$ может иметь 2 корня, 1 корень или не иметь решений.

Количество промежутков графика функции (левой части уравнения) четное, значит будет точка графика, так называемая вершина графика. Координаты вершины графика, соответствующие единственному решению уравнения, определяются по формуле:

$$x_B = \frac{a_{n+1}}{2}, y_B = y(x_B)$$

Третий этап работы заключался в том, чтобы применить полученные выводы при решении неравенств.

Задание 4. Решите неравенство $|x + 2| + |x - 3| + |x - 4| > 6$.

Решение: рассмотрим функции $f(x) = |x + 2| + |x - 3| + |x - 4|$ и $g(x) = 6$.

Построим графики данных функций (рисунок 2). Выполнив анализ полученных графиков, запишем ответ.

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

На основании выводов, полученных во второй части работы, данное задание можно решить быстрее. Вычислим по формуле координаты вершины графика и заметим, что ордината вершины совпадает со значением функции $g(x)$. На основании этого запишем ответ.

$$x_{\text{в}} = 3, y_{\text{в}} = 6, y_{\text{в}} = g(x).$$

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Выводы, которые были получены во второй части работы, позволяют быстро решать задания следующих видов:

1. Решите неравенство $|x + 2| + |x + 1| + |x - 1| + |x - 2| \leq 6$.

2. Определите, при каком значении a неравенство не имеет решений $|x + 3| + |x| + |x - 4| + |x - 7| < a$.

3. Определите, при каком значении a неравенство

$|x + 9| + |x + 5| + |x| + |x - 3| + |x - 4| \leq a$ имеет одно решение.

4. Решите неравенство

$|x + 2| + |x| + |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq a$ в зависимости от значения параметра a .

Результаты проведенного исследования позволяют наглядно рассмотреть связь между функциями и уравнениями, выявить закономерности, которые целесообразно использовать для быстрого рационального решения линейных уравнений и неравенств относительно модуля переменной.

Библиографические ссылки

1. Арефьева И. Г., Пирютко О. Н. «Школа юных математиков» пособие для учащихся 7 - ого класса// О.Н. Пирютко, И. Г. Арефьева. – Мн.: «Аверсэв», 2017. – 124 с.
2. Арефьева И. Г., Пирютко О. Н. «Школа юных математиков» пособие для учащихся 8 - ого класса// О.Н. Пирютко, И. Г. Арефьева. – Мн.: «Аверсэв», 2018. – 80 с.
3. Герасимов В. Д., Пирютко О. Н «Математика 6» учебное пособие для 6- ого класса // О.Н. Пирютко, В. Д. Герасимов. – Мн.: Адукация и выхаванне, 2022. – 312 с.
4. Арефьева И. Г., Пирютко О. Н. «Алгебра 9» учебное пособие для 9- ого класса// О.Н. Пирютко, И. Г. Арефьева. – Мн.: Народная Асвета, 2019. – 328 с.