СЕКЦИЯ 2. Математика и инновационные методы обучения математике

УДК 51.371.383

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛОГИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

М. А. Андреева
УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»
Минск (Республика Беларусь)
Науч. рук. – Н. К. Пещенко, к.пед.н., доцент

THE USE OF ANALOGY IN TEACHING STUDENTS TO SOLVE EXTREME PROBLEMS IN STEREOMETRY

M. A. Andreeva
Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank
Minsk (Republic of Belarus)
Scientific adviser – N. K. Peshchanka, PhD, Associate Professor

В статье рассматриваются вопросы обучения учащихся старших классов поиску решения экстремальных задач по стереометрии с помощью аналогичных вспомогательных задач по планиметрии.

The article deals with the issues of teaching high school students to find solutions to extreme problems in stereometry using similar auxiliary tasks in planimetry.

Ключевые слова: геометрия; планиметрия; стереометрия; задачи на нахождение наибольших и наименьших значений; внутренняя и внешняя аналогии

Key words: geometry; planimetry; stereometry; problems of finding the maximum and minimum values; internal and external analogies

Усилия почти всякой человеческой деятельности направлены на то, чтобы с наименьшей затратой сил достигать выгодных во всех отношениях результатов. Именно в такой форме могут быть сформулированы многие математические задачи, имеющие практическое значение, в том числе и задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значения величин (экстремальные задачи или задачи на оптимизацию).

Под экстремальными задачами будем понимать задачи, ставящие своей целью поиск наиболее эффективного, выгодного в определенных отношениях, наиболее экономного и наименее трудоемкого решения [2, с. 102-104].

Формирование умений решать такие задачи с помощью производной – одна из важных целей изучения начал математического анализа в средней школе. Задачи этого типа имеют четкую прикладную направленность – если не по фабуле, то по подходу к решению. Действительно, в них четко представлены все фазы построения и использования математической модели: формализация – составление функции, описывающей условие задачи; решение формализованной задачи – поиск значений аргумента, в которых значение производной функции равно нулю или в которых она не существует (критических точек); интерпретация – анализ критических точек с учетом особенностей задачи [3, с. 98].

Анализ школьных учебных пособий показывает, что в курсе стереометрии изучается ряд понятий, среди свойств которых есть свойства быть оптимальным (наименьшим, наибольшим, наикратчайшим и т.д.). К таким понятиям можно отнести расстояния между объектами в пространстве, углы между прямыми и плоскостями, площади поверхностей и объемы многогранников, тел вращения и их комбинаций.

Мы разработали факультативный курс по стереометрии для учащихся XI класса по теме «Задачи на экстремумы». Его цель – расширение и углубление знаний учащихся по методам решения стереометрических задач, развитие их интересов и способностей в области математики и воспитание у них навыков самостоятельной и исследовательской работы. Однако на практике оказалось, что содержание занятий вызывает не только интерес у обучаемых, но и значительные затруднения.

После изучения психолого-педагогической и методической литературы, опыта работы учителей мы пришли к выводу о целесообразности использования аналогии, как метода обучения поиску решения задач. Под аналогией в обучении в литературе понимается такой метод, при котором обоснованно и целенаправленно устанавливаются связи между фигурами, величинами и задачами с целью выявления их сходства и различия, обеспечивающего перенос свойств и отношений с одних объектов на другие [1, с. 2].

В методической литературе выделяют внутреннюю и внешнюю аналогию. По отношению к планиметрии и стереометрии аналогия между двумя объектами будет внутренней, если аналогичные объекты изучаются либо в планиметрии, либо в стереометрии. Мы в данном случае будем рассматривать один из объектов в планиметрии, другой – в стереометрии, и аналогия между ними является внешней.

Рассмотрим использование аналогии как способа поиска решения стереометрической задачи с помощью аналогичной вспомогательной задачи по планиметрии. В своей работе мы руководствовались следующими положениями.

• Для стереометрической задачи подбирается или составляется самостоятельно вспомогательная планиметрическая, аналогичная данной по рассматриваемым в ней объектам, содержанию и методу решения.

• Анализируется содержание и метод решения вспомогательной задачи, рассматривается возможность применения метода решения для стереометрической задачи.

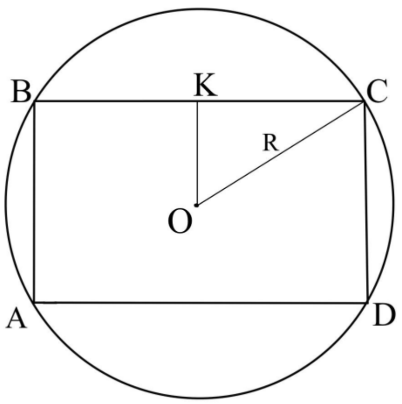
• Используется метод решения вспомогательной планиметрической задачи для решения стереометрической [4, с. 66].

Покажем это на примере.

Решаемая задача. Вписать в сферу радиуса R правильную четырехугольную призму наибольшего объема.

Вспомогательная задача. Вписать в окружность радиуса R прямоугольник наибольшей площади.

Решение.



Используя алгоритм решения задач на вычисление наибольшего и наименьшего значения величины, выделим оптимизируемую величину: S – площадь прямоугольника. Составим выражение для этой величины и введем некоторые обозначения. Пусть $2x$ – длина прямоугольника, а $2y$ – его ширина. Оптимизируемую величину можно выразить следующим образом:

$$S = 2x \cdot 2y = 4xy.$$

Выразим y через x. По условию и введенным обозначениям $x = KC, y = OК$. Рассмотрим прямоугольный треугольник OKC ($\angle OKC = 90°$). По теореме Пифагора $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда $S = 4x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$.

Рассмотрим функцию $S(x) = x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$, определенную на промежутке $(0, R)$.

$$S'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{R^2-x^2-x^2}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{R^2-2x^2}{2\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Для нахождения наибольшего значения функции приравняем $S'(x)$ к нулю.

Значит, $\frac{R^2-2x^2}{2\sqrt{R^2-x^2}} = 0$, откуда $x^2 = \frac{R^2}{2}$ и $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

$$S\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R^2}{2}.$$

Докажем, что при $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ функция принимает наибольшее значение.

Если $x < \frac{R}{\sqrt{2}}$, то $S'(x) > 0$ и $S(x)$ возрастает на промежутке $(0; \frac{R}{\sqrt{2}})$. Если $x > \frac{R}{\sqrt{2}}$, то $S'(x) < 0$ и $S(x)$ убывает на промежутке $(\frac{R}{\sqrt{2}}; R)$. Таким образом, прямоугольник будет иметь наибольшую площадь, если его стороны имеют длину $\frac{2R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}R$.

Заметим, что прежде чем переходить к решению основной задачи, целесообразно повторить с обучаемыми схему решения вспомогательной задачи. Она может быть следующей.

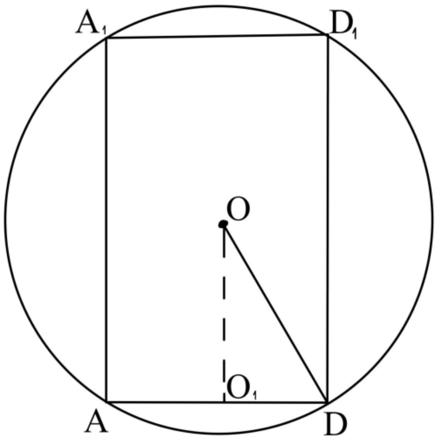
1) Задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр *x*, через который выражают как функцию *f (x)* ту величину, наименьшее или наибольшее значение которой необходимо найти.

2) Средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке.

3) Выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Проанализировав вместе с учащимися основные этапы и способ решения вспомогательной задачи, переходим к решению основной задачи.

Решение стереометрической задачи.



Рассуждая аналогично, в первую очередь выделяем оптимизируемую величину. Пусть x – длина стороны основания, y – высота призмы, тогда V– объем призмы и $V = x^2 \cdot y$.

Так как в основании призмы лежит квадрат, то $AD = x\sqrt{2}$ и $O_1D = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Для того, чтобы составить функцию одной переменной для оптимизируемой величины, выразим y через x. Получим: $y = 2 \cdot OO_1 = 2 \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{2}}$. Тогда $V = x^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{2}}$.

Рассмотрим функцию $V(x) = x^2 \cdot \sqrt{2R^2 - x^2}$, определенную на промежутке $(0, \sqrt{2}R)$.

$V'(x) = 2x \cdot \sqrt{2R^2 - x^2} + x^2 \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2R^2 - x^2}} = 2x \cdot (\sqrt{2R^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{2R^2 - x^2}}) = \frac{4R^2x - 3x^3}{\sqrt{2R^2 - x^2}}$.

Для нахождения наибольшего значения функции приравняем $V'(x)$ к нулю.

$\frac{4R^2x - 3x^3}{\sqrt{2R^2 - x^2}} = 0$, откуда $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Докажем, что при $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ функция принимает наибольшее значение.

Если $x < \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, то $V'(x) > 0$ и $V(x)$ возрастает на промежутке $(0; \frac{2R\sqrt{3}}{3})$. Если $x > \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, то $V'(x) < 0$ и $V(x)$ убывает на промежутке $(\frac{2R\sqrt{3}}{3}; \sqrt{2}R)$. Таким образом, призма, вписанная в сферу радиуса R, будет иметь наибольший объем, если ее сторона основания и высота будут равны $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Для закрепления навыков решения геометрических задач аналогичных как по рассматриваемым в них объектам, так и по методу решения предлагаем обучаемым следующие пары задач.

Задача 2. Вписать в сферу радиуса R конус, имеющий наибольший объем.

Вспомогательная задача 2. Вписать в окружность радиуса r равнобедренный треугольник, имеющий наибольшую площадь.

Задача 3. В конус вписана правильная четырехугольная призма так, что четыре вершины призмы, принадлежащие одной грани, лежат в плоскости основания конуса, а четыре другие вершины принадлежат образующим конуса. При каких размерах призмы ее объем будет наибольшим?

Вспомогательная задача 3. В равнобедренный треугольник вписан прямоугольник так, что две смежные вершины прямоугольника лежат на стороне основания треугольника, а две другие принадлежат его сторонам. Какими должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

В заключение отметим, что использование в обучении такого метода научного познания, как аналогия, предполагает активное участие учащихся в процессе обучения и, как следствие этого, более доступное, прочное и осознанное усвоение учебного материала.

Библиографические ссылки

1. Менькова, С.В. Особенности конструирования окрестностей математических задач-аналогов [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. – Пенза: Изд-во: Издательский Дом «Академия Естествознания», 2014. – №5. – Режим доступа: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=15080 – Дата доступа: 05.04.2023.

2. Петров Н.Н. Задачи на экстремум. – М.: Palmarium Academic Publishing, 2014. – 248 с.

3. Прасолов В.В. История математики. Ч.1, 2.// В.В. Прасолов, – М.: МЦНМО, 2018, 2019. – 140 с.

4. Семушина Л.Б. Аналогия как метапредметная деятельность в процессе обучения математике [Электронный ресурс] // Пермский педагогический журнал. -2013, № 4. – Режим доступа: http://elibrary.ru. – Дата доступа: 05.04.2023.