Е. П. Кузнецова, *доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета;*
А. Г. Зык, *студентка IV курса физико-математического факультета Белорусского государственного педагогического университета*

ИЗУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ В V–VII КЛАССАХ: МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ

Рассмотрим некоторые методические проблемы, возникающие при изучении линейных уравнений и уравнений, сводящихся к ним, в школьном курсе математики, иллюстрируя их материалами учебных пособий различных авторских коллективов ([1; 2; 3] — Беларусь, [4] — Россия, [5] — Украина).

Первой следует выделить проблему определений. Например, в пособии [5, а] дана такая формулировка: «Уравнение — это равенство, из которого находят неизвестную величину, обозначенную, как правило, буквой латинского алфавита». Здесь определяющим признаком понятия «уравнение» является процесс поиска значения неизвестного (переменной), что, по нашему мнению, существенно сужает объём вводимого понятия. Например, употребление таких терминов, как «уравнение окружности», «уравнение параболы», зачастую не связано с поиском значений неизвестных.

В остальных пособиях [1–4, а] уравнение определяется как равенство с переменной. Именно такая формулировка стала преобладающей в учебных пособиях многих авторов, начиная с реформы в СССР школьного математического образования второй половины XX века. При этой формулировке определения уравнения, вообще говоря, не исключается случай и нескольких переменных. Примеров уравнений с несколькими переменными в пособиях для V–VI классов для учащихся не приводится, хотя они здесь присутствуют. Например, о формуле прямой пропорциональности

$$y = kx,$$

изучаемой в VI классе, а позже и в старших классах, говорят как об уравнении (здесь содержится не одна переменная). Просто уравнениями (до VII класса) называют и линейные уравнения, которые учащиеся решают с начальных классов.

В VII классе определение линейного уравнения с одной переменной (с одним неизвестным) вводится в параметрическом виде. В пособиях [1–4, б] такое линейное уравнение определено равенством вида

$$ax = b,$$

а в пособии [5, в] — через равенство

$$ax + b = 0,$$

где a и b — числа, x — переменная (неизвестное). В учебном пособии [1, б] параллельно используются два термина («переменная» и «неизвестное»), а в книгах [2–5, б] — только термин «переменная». Термин «параметр» в пособиях для V–VII классов никем из указанных авторов в явном виде не упоминается.

В начальных классах и вплоть до VII класса учащиеся решают все уравнения на основании зависимостей между компонентами арифметических действий, отвечая на вопросы следующего типа: «Как найти неизвестное слагаемое (уменьшаемое, вычитаемое, делимое и т. д.)?». Введение в VII классе определения равносильных уравнений с одной переменной и их свойств позволяет получить чёткий алгоритм решения любого уравнения, сводящегося к линейному. Но до изучения понятия равносильных уравнений некорректно при решении, например, уравнения $3x = -0{,}9$ говорить «разделим обе части уравнения на 3, получим $x = -0{,}3$» [3, б, с. 148].

В V классе умение раскрывать скобки даёт возможность при работе, например, с уравнением

$$1000 - (537 - a) = 642$$

показать два способа его решения (с использованием только зависимостей между компонентами арифметических действий и с использованием предварительного раскрытия скобок). Но применение второго способа вызовет недоумение у пятиклассников при решении уравнения

$$1000 - (1537 - a) = 642,$$

ведь они ещё не знают действий над отрицательными и положительными числами, изучаемых в VI классе. Примеры подобных уравнений могут помочь учителю при создании в классе проблемной ситуации перед введением действий над рациональными числами.

Содержанием учебной программы в V–VI классах учащиеся не подготовлены и к решению уравнения с переменной в обеих его частях. Так для решения уравнения

$$3(x + 1) + 2(x + 2) = 5 - 4x$$

нужны знания о действиях, которые сохраняют равносильность уравнений (VII класс). Такие примеры можно использовать для мотивации изучения действий над уравнениями. Только после рассмотрения свойств равносильных уравнений становится законным использование таких привычных оборотов, как «перенесём все члены с переменной из правой части уравнения в левую часть, а все числа — в правую, изменяя знаки переносимых выражений на противоположные им».

К сожалению, в учебном процессе не всегда акцентируется связь линейных уравнений с уравнениями следующих видов:

а) $|f(x)| = a$, где $f(x)$ — двучлен с одной переменной первой степени, a — действительное число;

б) $f_1(x)\ f_2(x)\ \ldots\ f_n(x) = 0$, где $f_i(x)$ — двучлен с одной переменной первой степени.

Решение уравнений таких видов приводит к решению совокупности линейных уравнений, которая в этих случаях будет равносильна исходному уравнению. В пособии [1, б, с. 64] разобраны решения уравнений

$$|y| = 7 \text{ и } |y - 3| = 7,$$

решено также и уравнение

$$(t - 1)(t + 2)(3 - t) = 0.$$

Теоретический материал пособия [5, б] тоже содержит решения аналогичных примеров уравнений:

$$|5x - 6| = 4;$$

$$(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0.$$

В пособиях VII класса других авторов уравнения данного вида в теории не рассмотрены, но встречаются в учебных пособиях для старших классов.

Для завершения формирования программной математической компетенции *«уметь решать линейные уравнения»* полезно начиная с VIII класса включать в упражнения и уравнения вида

$$(3x+2{,}1)(8-2\sqrt{x})=0,$$

решение которых методами, изученными ранее, приводит к появлению постороннего корня. Учителю своевременно следует позаботиться о замене привычной формулировки для равенства произведения нулю другой, использование которой приводит к замене исходного уравнения на равносильные условия. В данном конкретном случае — на совокупность вида:

$$\begin{cases} 3x+2{,}1=0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

или

$$8-2\sqrt{x}=0,$$

поскольку произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом не теряют смысла.

Для учащихся, способных к математике, необходимое им заключительное творческое обобщение полученных умений и навыков может и должно реализовываться (хотя бы в старших классах) через решение линейных уравнений с одним параметром. Теоретическая база для этого имеется, поскольку все пособия для VII класса [1–5, б] решение линейного уравнения излагают в общем виде (причём не с одним, а с двумя параметрами!). Но линейные уравнения с одним параметром, например, такие как

$$2a(a-2)x = a-2,$$

рассмотрены только в пособии [4, в].

Разумеется, в процессе обучения алгебре должны быть в явном виде активизированы и связи линейных уравнений (а затем, конечно, и неравенств) со свойствами линейной функции. При исследовании свойств линейной функции

$$y = kx + b$$

в общем виде процесс поиска её нулей полностью совпадает с процессом решения линейного уравнения

$$kx + b = 0.$$

В учебных пособиях [1–3, б] линейная функция рассматривается в общем виде, и при

$$k \neq 0;$$

$$k = b = 0;$$

$$k = 0,\ b \neq 0$$

строятся её графики для конкретных значений k и b. В соответствии с учебными программами в пособиях [1–2, б] и [4–5, б] свойство «нули функции» не рассматривается, т. е. его изучение реализуется в старших классах. В этих пособиях для VII класса лишь анализируется размещение графиков частных случаев линейной функции относительно системы координат и друг друга. В пособии [3, б] до построения графиков частных случаев линейной функции в общем виде исследованы некоторые её свойства, в том числе поиск нулей функции осуществляется при решении уравнения

$$kx + b = 0$$

[3, б, с. 229].

Но это уравнение здесь не названо линейным, и его решение никак не соотнесено с решением линейного уравнения вида

$$ax = b$$

на с. 148.

Умение решать линейные уравнения является одним из основных элементов школьной алгебраической подготовки. Линейным уравнением моделируются многие реальные процессы. Именно линейные уравнения являются первыми математическими моделями, изучаемыми в общеобразовательной школе, с их помощью решаются многие задачи не только по математике, но и в других дисциплинах. Знание методических проблем изучения линейных уравнений (определение, терминология, подходы к решению, реализация связей с другими видами уравнений и со свойствами линейной функции) поможет учителю отбирать и самостоятельно конструировать дидактические материалы, способствующие организации продуктивного усвоения учащимися важного математического понятия. Учёт этих методических особенностей даст возможность оптимизировать учебный процесс, полноценно формировать соответствующие математические, а также общие внутри- и межпредметные компетенции, предусмотренные учебной программой.

Список использованных источников

1. *Кузнецова Е. П., Муравьёва Г. Л., Шнеперман Л. Б., Ящин Б. Ю., Войтова Ю. К.*

а) Математика. 5 класс : в 2 ч. Ч. 1. — Минск : НИО, 2013. — 224 с.

б) Алгебра. 7 класс. — Минск : Нар. асвета, 2014. — 318 с.

2. *Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д.*

а) Математика. 5 класс : в 2 ч. Ч. 1. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013. — 176 с.

б) Математика. 7 класс. — Минск : Нар. асвета, 2014. — 367 с.

3. *Герасимов В. Д., Пирютко О. Н., Лобанов А. П., Арефьева И. Г.*

а) Математика. 5 класс : в 2 ч. Ч. 1. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2017. — 168 с.

б) Алгебра. 7 класс. — Минск : Нар. асвета, 2017. — 316 с.

4. *Зубарева И. И., Мордкович А. Г.*

а) Математика. 5 класс. — М. : Мнемозина, 2013. — 270 с.

б) Алгебра. 7 класс : в 2 ч. Ч. 1. — М. : Мнемозина, 2013. — 175 с.

в) Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : в 2 ч. Ч. 1. (базовый уровень). — М. : Мнемозина, 2013. — 400 с.

5. *Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.*

а) Математика. 5 класс. — М. : Вентана-Граф, 2013. — 304 с.

б) Алгебра. 7 класс. — Х. : Гимназия, 2015. — 256 с.