

ИНТЕНСИВНОСТЬ МАКСИМУМОВ ПРИ ДИФРАКЦИИ НА ЩЕЛИ И НА ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКЕ

О. А. Котович

УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
Брест (Республика Беларусь)
Науч. рук. – П. Б. Кац, к. ф.-м.н., доцент

INTENSITY OF MAXIMA AT DIFFRACTION ON A SLIT AND ON A DIFFRACTION GRATING

O. A. Katovich

Brest State University Named after A.S. Pushkin
Brest (Republic of Belarus)

Scientific adviser – P. B. Kats, Dr. PhD, Associate professor

В статье проанализированы приводимые в учебной литературе отношения интенсивностей дифракционных максимумов для дифракции на щели и на дифракционной решетке. Вычислены эти отношения с повышенной точностью для щели и для дифракционной решетки при $N \gg 1$. Вычислены относительные интенсивности побочных максимумов для дифракционной решетки с 6 щелями и отношением $b/d = 0,5$.

The article analyzes the ratios of the intensities of diffraction maxima given in the educational literature for diffraction on a slit and on a diffraction grating. These ratios are calculated with increased accuracy for the slit and for the diffraction grating at $N \gg 1$. The relative intensities of side maxima for a diffraction grating with 6 slits and a ratio of $b/d = 0.5$ are calculated.

Ключевые слова: дифракция, щель, дифракционная решетка, дифракционные максимумы

Key words: diffraction, slit, diffraction grating, diffraction maxima

В школьном учебном пособии по физике [1, с. 100] при рассмотрении дифракции на дифракционной решетке утверждается: «Отношение интенсивностей максимумов в нулевом, первом и втором порядках: $I_0 : I_1 : I_2 = 1 : 0,047 : 0,017$ ». Если речь идет не про интенсивность вторичных максимумов, а про интенсивности главных максимумов, то соотношение интенсивностей зависит от отношения периода дифракционной решетки к ширине щели. Приведем соответствующую формулу [2, с. 185]:

$$I_m = \frac{A_0^2 N^2 d^2}{\pi^2 m^2 b^2} \sin^2 \frac{\pi b m}{d},$$

N – число щелей в дифракционной решетке, d – период решетки, b – ширина щели, m – порядок максимума A_0 – амплитуда колебаний напряженности электрического поля, создаваемых одной щелью.

Для центрального максимума получаем

$$I_0 = A_0^2 N^2$$

Отсюда связь интенсивности m -го максимума с интенсивностью центрального максимума

$$I_m = I_0 \frac{d^2}{\pi^2 m^2 b^2} \sin^2 \frac{\pi b m}{d}.$$

Рассмотрим, следуя [2], случаи $d = 2b$ и $d = 3b$. Тогда расчет для интенсивности максимумов приводит к следующим результатам:

Таблица 1. – I_m/I_0 , %

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$d = 2b$	40,5 (40)	0	4,5	0
$d = 3b$	68,4 (67,5)	17,1 (17)	0	4,3 (4,2)

В скобках приводятся данные из [2], отличающиеся от полученных нами.

Анализ учебной литературы показывает, что похожие на приведенные в [1] отношения имеют место для 1) интенсивностей максимумов при дифракции на щели и 2) интенсивностей вторичных максимумов при дифракции на дифракционной решетке.

Рассмотрим первый случай. Будем опираться на [2, с. 162, 799], но приведем более подробные выкладки. При дифракции на щели интенсивность распределяется по закону

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}, \alpha = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi. \quad (1)$$

Положения максимумов найдем из равенства нулю производной I'_α .

$$\frac{dI}{d\alpha} = I_0 \frac{2\alpha^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2\alpha \sin^2 \alpha}{\alpha^4} = 0.$$

Так как максимумы имеют место при конечных значениях α , то должен быть равен нулю числитель дроби.

$$\alpha^2 \sin \alpha \cos \alpha = \alpha \sin^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

В [2] приведены результаты решения трансцендентного уравнения. Мы нашли более точные решения, используя программу Mathematica:

$$\begin{aligned} \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1,4303\pi, \alpha_2 = 2,4590\pi, \alpha_3 = 3,4709\pi, \\ \alpha_4 = 4,4774\pi, \alpha_5 = 5,4815\pi, \dots, \alpha_{100} = 100,4990\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что в [2] приведено значение $\alpha_4 = 4,47\pi$, тогда как при округлении получается $4,48\pi$.

Найденным значениям α соответствуют углы дифракции, определяемые из условия:

$$b \sin \varphi = 0; 1,4303\lambda; 2,4590\lambda; \dots 100,4990\lambda \dots$$

Видно, что с ростом порядка максимума условие максимума стремится к виду

$$b \sin \varphi = (2m+1) \frac{\lambda}{2}. \quad (4)$$

Однако точно условие (4) не выполняется. Это обстоятельство указывается в [3, с. 292].

Теперь можно найти соотношение интенсивностей по формуле (1). Полученные результаты представлены в таблице 2. Там же приводятся данные из [2].

Таблица 2. – I_m / I_0 , %

	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
φ . (1)	4,719	1,648	0,834	0,503
[2]	4,5	1,6	-	-

Заметим, что результат для первого максимума в [2] приводится неверно. Там же написано, что «приближенно эти отношения можно выразить в виде»:

$$1 : \frac{4}{9\pi^2} : \frac{4}{25\pi^2} : \dots \quad (5)$$

Именно для такой формулы получается 4,5 % для отношения интенсивности первого максимума и нулевого. Аналогичное соотношение получает Савельев [4 с. 133] методом графического сложения амплитуд:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008. \quad (6)$$

В [3] приводятся относительные интенсивности: $X = 0,047, 0,017, 0,008, \dots$

Приведем в таблице 3 результаты из источников [5, с. 112] и [6, с. 363]. Жирным выделены неточности.

Таблица 3. – Положения максимумов и относительные интенсивности

Порядок максимума	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
$b \sin \varphi / \lambda$ [5, с. 112]	1,43	2,46	3,47	4,48
[6, с. 363]	1,430	2,459	3,470	4,48
I_m/I_0 [5, с. 112]	4,5	1,6	0,8	0,5
[6, с. 363]	4,718	1,694	0,834	0,503

Самые точные результаты приводятся в [7, с. 85–86]:

$$\alpha_1 = 8,99 \text{ рад}; \alpha_2 = 15,45 \text{ рад}; \alpha_3 = 21,81 \text{ рад} \quad I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,0472 : 0,0165 : 0,0083$$

В обозначениях [7] α в 2 раза больше, чем в наших обозначениях.

Вопрос о положении и интенсивности дополнительных максимумов рассматривается в [2, с.801] и в [8, с. 305]. В обоих источниках полагают приближенно, что побочные максимумы находятся посередине между

побочными минимумами. Отсюда получается соотношение интенсивностей для случая очень большого числа щелей и небольшого номера побочного максимума в соответствии с формулой (5).

Распределение интенсивности при дифракции на дифракционной решетке определяется формулой [2, с. 183]:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 N\beta}{\alpha^2 \sin^2 \beta}, \alpha = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi, \beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi. \quad (7)$$

I_0 – интенсивность, создаваемая одной щелью в направлении первичного пучка. При $N \gg 1$ и номере побочного максимума $m \ll N$ можно не учитывать медленную зависимость от α и учитывать только зависимость интенсивности от β :

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}. \quad (8)$$

Тогда, путем дифференцирования по β и преобразований можно получить трансцендентное уравнение для нахождения β_{\max} :

$$\tan(N\beta) = N \tan \beta. \quad (9)$$

Для рассматриваемых приближений $\beta \ll 1$, поэтому можно заменить $\tan \beta$ на β .

$$\tan(N\beta) = N\beta. \quad (10)$$

Уравнение (10) совпадает с уравнением (2) при $\beta = \alpha/N$. Тогда, используя результат (3), получаем, что максимумы лежат не точно между минимумами, а под углами, соответствующими условию:

$$\beta_1 = \frac{1,4303\pi}{N}, \beta_2 = \frac{2,4590\pi}{N}, \beta_3 = \frac{3,4709\pi}{N}, \beta_4 = \frac{4,4774\pi}{N} \dots$$

Заменяя в (8) синус угла на сам угол, получаем

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N\beta}{\beta^2} = I_0 N^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}.$$

При этом

$$I(0) = I_0 N^2, \frac{I}{I(0)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}.$$

Таким образом в приближении $N \gg 1$, $m \ll N$ и формула для отношения интенсивностей побочных максимумов к главному совпадает с формулой для отношения интенсивности максимумов для щели.

Следовательно, отношения интенсивностей побочных максимумов к интенсивности главного максимума оказываются такими же, как для максимумов и центрального максимума при дифракции на щели!

Если число щелей невелико, то надо учитывать отношение b/d . Исходя из того, что на рисунке в [1] отношение интенсивностей максимума первого порядка и центрального максимума примерно 0,45, рассмотрим случай $b/d = 0,5$ (при этом, согласно таблице 1, отношение интенсивностей 0,4). Тогда для $N = 6$

численный расчет по формуле (7) дает следующие интенсивности побочных максимумов в процентах от интенсивности центрального максимума:

Таблица 4. – Относительные интенсивности побочных максимумов для 6 щелей

Порядок побочного максимума	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$I_m/I_0, \%$	5,3	2,6	2,2	3,4

Таким образом, в работе показано, что, как при дифракции на щели, так и в случае дополнительных максимумов при дифракции на дифракционной решетке с числом щелей $\gg 1$ отношение интенсивностей максимумов к интенсивности центрального максимума одно и то же.

Библиографические ссылки

1. Жилко, В.В. Физика: учеб. пособие для 11-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Жилко, Л. Г. Маркович. – Минск : Нар. асвета, 2014. – 287 с.: ил.
2. Ландсберг, Г.С. Оптика. Учеб. пособие: Для вузов. – 6-е изд., стереот./ Г.С. Ландсберг. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.– 848 с.
3. Зоммерфельд, А. Оптика. Перевод с немецкого Н. В. Родниковой. Под редакцией М. А. Ельяшевича / А. Зоммерфельд. – М.: Издательство иностранной литературы, 1953.– 486 с.
4. Савельев, И.В. Курс общей физики: учеб. Пособие. В 3-х т. Т. II. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика, атомная физика. – 3-е изд. испр./ И.В. Савельев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987.– 496 с.
5. Детлаф, А.А. Курс физики (в трех томах): Учебное пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. т. III: Волновые процессы. Оптика. Атомная и ядерная физика/ А. А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. школа, 1979. – 511 с, ил.
6. Борн, М. Основы оптики / М.Борн, Э. Вольф Э., изд. 2-е. Перевод с английского. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической . литературы, 1973. – 716 с, ил.
7. Колмаков, Ю.Н. Учебное пособие по курсу «Оптика» для студентов ТулГУ специальности 010400 «Физика» / Ю. Н. Колмаков, С.Е. Кажарская. Тула, 2000. – 124 с.
8. Сивухин, Д.В. Учеб. пособие: для вузов. В 5 т. Т. IV, Оптика / Д.В. Сивухин. – М. : Наука, 1980. – 752 с.