УДК 532.31

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА НА ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

В. А. Вершинин
УО «Белорусская государственная академия авиации»
Минск (Республика Беларусь)
Науч. рук. – А. И. Кириленко, к.ф.-м. н., доцент

BODY EQUILIBRATION ON A CURVED SURFACE IN FRICTION CONDITIONS

V. A. Vershinin
Belarusian State Aviation Academy
Minsk, (Republic of Belarus)
Scientific adviser – A. I. Kirilenko, Dr. PhD, Associate professor

Решается задача о равновесии однородного стержня, опирающегося в двух точках на дугу полуокружности, поставленной неподвижно на горизонтальной плоскости так, что образуется «чаша». Задаются коэффициенты трения и отыскивается угол между стержнем и горизонталью с учетом доли длины стержня, выступающей за контур дуги. Показано, что равновесие может достигаться как при двух положениях стержня, то есть при двух углах, так и при единственном. Возможны ситуации, когда равновесие вообще не достигается.

The article is directed to the problem of equilibration of a homogeneous rod supported at two points on a semicircular arc fixed on a horizontal plane, forming a "bowl". The coefficients of friction are given and the angle between the rod and the horizontal is sought. The length of the part of the rod outside the arc is also taken into account. It is shown that equilibration can be achieved at either two positions of the rod at two angles or at a single angle. There may be situations where equilibration is not achieved at all.

Ключевые слова: равновесие тела, статически неопределимая задача, внешнее трение, момент силы, силы реакции опоры

Key words: body balance; statically indeterminate task; external friction; moment of force; reaction forces of supports

Введение в проблему. Постановка задачи.

Задача о равновесии лестницы, приставленной к стенке и опирающейся под углом в пол, является древнейшей и одной из первых, так называемых, «статически неопределимых задач». Она легко анализируется при добавлении в условие некоторых гипотез о трении и базовых соотношений статики тел с распределенной массой для поступательного и вращательного движения. В этом приближении с решением трудностей не возникает, если не рассматривается деформация соприкасающихся тел и возможность трехмерного смещения.

В сообщении представлены новые аспекты известной задачи о равновесии стержня, который одним концом упирается в дно сферического сосуда в виде полусферы (чаши) или дно разрезанного вдоль образующей цилиндра, а другим – на край этого сосуда. Рассмотрение проведено в приближении плоской системы сил при малом уровне деформации сопрягаемых поверхностей в представлении стандартной гипотезы о действии сил трения в точках контакта [1, с. 256 - 257; 2]. В виду неидентичности геометрической топологии сопрягаемых поверхностей естественно допустить, что коэффициенты трения в этих точках касания у дна и на краю различны. И именно в силу того, что рассматриваемая система сил предполагается двумерной, анализ отвечает как задаче о нахождении условий покоя круглого в поперечном сечении стержня в полости полусферы, так и, например, той же лестницы в полуцилиндрической полости, расположенной горизонтально (горка для катания на роликах, скейт-бордах).

Целью работы является определение угла, под которым однородный стержень в полусфере, лестница в полуцилиндре будет находиться в состоянии равновесии, при неоднозначности трения в местах контакта и варьировании положения центра масс стержня относительно центра симметрии полости.

Метод анализа проблемы и техника расчета.

Стержень будем характеризовать массой m, длиной L и той частью длины, которая находится вне сосуда (рисунок 1).

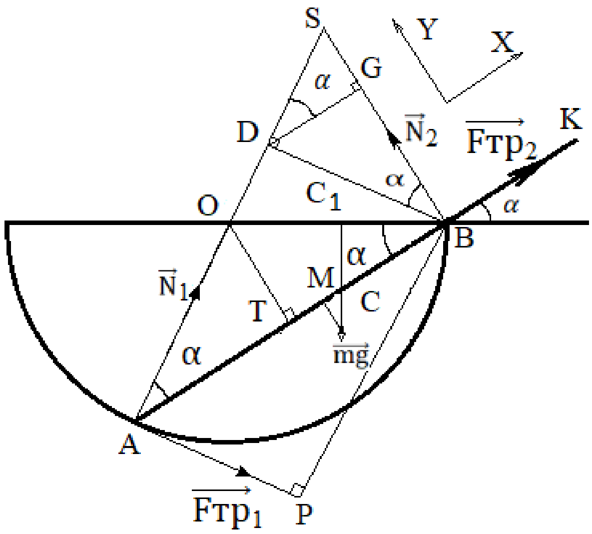

Рис. 1 – Схема основных параметров задачи: по смыслу – чаша, стержень, силы, действующие на стержень, плечи сил тяжести и трения

Следуя рисунку 1, имеем: $AK = L$ – длина стержня, точка C – центр тяжести стержня, отрезок $BK = \dfrac{L}{n}$ – часть стержня вне сосуда, $n > 1$. Отрезок AB

– доля стержня в полости сосуда, $AB = L\dfrac{n-1}{n}$. Поскольку $AO = OB = R$ – радиус сферы, то $AT = TB$, из-за $OT \perp AB$.

Для анализа требуется ввести отрезок BC – как расстояние от точки опоры B до центра тяжести стержня C.

$$BC = AB - AC = L\frac{n-1}{n} - \frac{L}{2} = L\frac{n-2}{2n} \ . \qquad (1)$$

Из геометрических соображений

$$\cos\alpha = \frac{AT}{R} = \frac{L}{2R}\frac{n-1}{n}. \qquad (2)$$

Нетрудно уяснить, что изменение угла наклона α влечет за собой изменение длины выступающей части стержня. При увеличении угла α число n уменьшается и часть стержня за пределами чаши увеличивается:

$$dn = -n^2\sqrt{1-(\frac{L}{2R})^2(1-\frac{1}{n})^2}\ d\alpha\ . \qquad (3)$$

На стержень действует сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в центре тяжести C, сила реакции опоры $\vec{N}_1$, приложенная в точке контакта A и направленная по радиусу к центру сферы O, сила реакции опоры $\vec{N}_2$, приложенная в точке контакта B и направленная перпендикулярно стержню. Кроме того, действуют силы трения в точках контакта стержня со сферой: в точке A $\vec{F}_{тр,1}$, перпендикулярная радиусу OA, и в точке B – сила $\vec{F}_{тр,2}$ направленная вдоль стержня.

Векторное уравнение из условий покоя стержня:

$$\vec{N}_1 + \vec{F}_{тр,1} + m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр,2} = 0 \qquad (4)$$

Для полного равновесия кроме покой центра масс требуется отсутствие результирующего момента сил относительно любой оси вращения. В задаче двумерного движения уместно принять ось вращения за одну из горизонтальных осей нормальных к плоскости чертежа и проходящих через точку касания – точку B.

Суммарный момент сил тяжести и силы трения в полости по условиям задачи в равновесии равен нулю:

$$-N_1\cdot DB + F_{тр,1}\cdot PB + mg\cdot BC_1 = 0\ . \qquad (5)$$

Следуя рисунку 1 плечи соответствующих сил

$$BD = AB\sin\alpha\,,\quad BP = AD = AB\cos\alpha\,,\quad BC_1 = BC\cos\alpha \qquad (6)$$

здесь α – искомый угол, который стержень составляет с горизонтом.

Ось x системы координат выбрана вдоль стержня, ось y – соответственно перпендикулярно стержню (Рис.).

В уравнении моментов (5) фигурирует только $\vec{F}_{тр,1}$, поэтому задав её в виде $F_{тр,1} = \mu_1 N_1$, можно из (5) определить силу реакции опоры N_1 через силу тяжести mg как

$$N_1 = mg \frac{n-2}{2(n-1)} \frac{1}{tg\alpha - \mu_1}. \qquad (7)$$

В проекциях на ось y векторное равенство (4) приводится к

$$N_1 \sin\alpha - F_{тр,1} \cos\alpha - mg \cos\alpha + N_2 = 0,$$

что позволяет с помощью (4) получить N_2

$$N_2 = mg \frac{n}{2(n-1)} \cos\alpha\ . \qquad (8)$$

Из рассмотрения проекций сил на ось x:

$$N_1 \cos\alpha - F_{тр,1} \sin\alpha - mg \sin\alpha + F_{тр,2} = 0,$$

следует

$$N_1(\cos\alpha - \mu_1 \sin\alpha) + \mu_2 N_2 = mg \sin\alpha\ . \qquad . \qquad (9)$$

Подстановка в (9) выражений (7) и (9) приводит к условию баланса в терминах вывешенной доли длины стержня и угла наклона:

$$2(n-1) tg^2\alpha - n(\mu_1 + \mu_2) tg\alpha + n\mu_1\mu_2 - (n-2) = 0. \qquad (10)$$

Из (10) следует, что при заданном значении n, угол, под которым устанавливается стержень, не зависит от массы стержня.

Задача о равновесии стержня в чаше свелась к исследованию решений уравнения (10). Физический смысл имеют только его положительные решения. Оно может иметь два решения, одно решение или даже ни одного.

Из квадратного относительно $tg\alpha$ уравнения (10) можно найти искомый угол α при условии того, что дискриминант неотрицательный:

$$D = n^2(\mu_1 + \mu_2)^2 - 8(n-1)n\mu_1\mu_2 + 8(n-1)(n-2) \ge 0 \qquad (11)$$

Условие (11) следует рассмотреть, как ограничение на возможность равновесия стержня в сферическом сосуде. Его можно представить в эквивалентном виде

$$(\mu_1^2 + \mu_2^2 - 6\mu_1\mu_2 + 8)n^2 - 8(3 - \mu_1\mu_2)n + 16 \ge 0, \qquad (12)$$

как неравенство относительно n. Приравняв в (12) левую часть нулю, это условие можно рассматривать как поверхность уровня $n(\mu_1, \mu_2)$, на которой решение квадратного уравнения (11) единственно, то есть стержень в чаше может находиться в единственном положении равновесия. Дискриминант для этого квадратного трёхчлена

$$D_1 = 64(1 + \mu_1^2 \mu_2^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2) \tag{13}$$

Для существования действительных корней n должен быть положительным, что даёт

$$1 + \mu_1^2 \mu_2^2 \geq \mu_1^2 + \mu_2^2 \tag{14}$$

Это неравенство выполняется всегда, поскольку коэффициенты трения меньше единицы.

Неравенство (14) единственное ограничение, которое можно получить для коэффициентов трения. Однако его выполнение не связано с условием (11), которое является более общим, но зависит от трех параметров n, μ_1, μ_2, что затрудняет исследование.

Для построения поверхности уровня преобразуем уравнение (12) к виду $n(\mu_1, \mu_2)$:

$$n = 4\frac{(3 - \mu_1\mu_2) \pm \sqrt{1 + \mu_1^2 \mu_2^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2}}{\mu_1^2 + \mu_2^2 - 6\mu_1 \mu_2 + 8} > 1\ . \tag{15}$$

В математическом пакете Wolfram Mathematica построена поверхность уровня. Она состоит из двух частей, одна из которых выпукла (при знаке «+» в (15)), а другая вогнута. Рисунок позволяет ориентироваться в выборе параметров для расчета. В частности, если $tg\alpha$ нельзя определить из (14), это не означает, что уравнение (10) не будет иметь решений. Результаты расчетов представлены таблице 1.

Таблица 1. - Результаты расчетов равновесного угла α

№	μ_1	μ_2	n	α
1	0,5	0,5	2	$26{,}56^0$
2	0,2	0,4	1,5	-
3	0,2	0,8	3,0	$41{,}83^0$
4	0,8	0,6	1,2	$72{,}04^0$; $48{,}11^0$

В первом случае дискриминант уравнения (10) равен нулю. Корень единственный. В случае 2 дискриминант (10) отрицателен и корней нет. В случае 3 при положительном дискриминанте один из корней отрицателен и не подходит по смыслу. Наконец, в случае 4 возможны два положения равновесия стержня в чаше. В дополнение к сказанному уместно заметить, что в подобной задаче для лестницы, опирающейся на пол и стену приводится однозначное решение

$$tg\alpha_1 = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2} \qquad (16)$$

где как и ранее, присутствуют только коэффициенты сил трения скольжения на противоположных концах лестницы.

Заключение. В рамках задачи о равновесии однородного стержня, опирающегося в двух точках на дугу полуокружности, или лестницы в цилиндрической полости в горках для скейт-бордов (роликов) рассмотрены и исследованы виды решений с учетом доли длины конструкции за контуром полуокружности. Обоснованы виды решений для равновесного положения в одном положения, а также при двух значениях углов наклона. Обоснованы условия, при которых положения равновесия достичь невозможно.

Библиографический список

1. Кильчевский, Н.А. Курс теоретической механики т.1 / Н. А. Кильчевский. – Москва: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1977. - 479 с.

2. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. – Москва: Высшая школа, 1983. - 575 с.

УДК 372.853

ДИДАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЗДОРОВЬЕСБЕРЕГАЮЩИХ ТЕХНОЛОГИЙ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ФИЗИКЕ В ШКОЛЕ

Гвоздева В. М.
ФГБОУ ВО «Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого»
Тула (Российская федерация)
Науч. рук. – Н. Л. Плешакова, к.пед.н., доцент

DIDACTIC ASPECTS OF IMPLEMENTATION HEALTH-SAVING TECHNOLOGIES IN PHYSICS CLASSES AT SCHOOL

Gvozdeva V. M.
Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy
Tula (Russian Federation)
Scientific adviser – N. L. Pleshakova, PhD, Associate Professor

В статье рассматриваются методические аспекты реализации здоровьесберегающих технологий как одного из продуктивных подходов повышения интереса к физике, мотивационного ресурса процесса обучения физике. Выделены систематические факторы влияния на состояние здоровья школьника. Описана практика оценки учителем физики (экспертом) уровня сформированности универсальных учебных действий (УУД) учащихся 7 класса.