3 ИННОВАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К ОБУЧЕНИЮ ФИЗИКЕ, МАТЕМАТИКЕ, ИНФОРМАТИКЕ

УДК 514.1

ПОСТРОЕНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ И ЗАДАЧА О ДВУХ КАРТАХ

К. А. Борисенко
УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»;
Минск (Республика Беларусь)
Науч. рук. – Н. В. Гриб, к.ф.-м.н., доцент

CONSTRUCTION OF A FIXED POINT OF PLANE TRANSFORMATIONS AND TWO MAPS PROBLEM

K. A. Borisenko
Belarusian state pedagogical university named after Maxim Tank;
Minsk (Republic of Belarus)
Scientific adviser – N. V. Grib, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor

Рассмотрена задача о неподвижной точке двух географических карт. С помощью метода преобразований плоскости разработаны различные способы построения неподвижной точки циркулем и линейкой.

The problem of a fixed point of two geographical maps is considered. Using the method of plane transformations, various methods for constructing a fixed point with a compass and a ruler have been developed.

Ключевые слова: преобразование плоскости; движение; преобразование подобия; неподвижная точка преобразования.

Keywords: plane transformations; plane motion; similarity transformation; transformation fixed point.

Популярная задача о существовании особой точки двух географических карт (см., например, [1, стр. 63]) интересна сама по себе: «Две прямоугольные карты одной местности разного масштаба наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка местности». Такую точку будем называть неподвижной точкой карт. Вместе с этим описываемая в задаче ситуация обладает большим исследовательским потенциалом. В работе [2] рассматривалась более общая задача: найти (пользуясь лишь циркулем и линейкой) все неподвижные точки двух карт, если карты могут иметь любой масштаб и располагаться на плоскости произвольным образом, в том числе и «лицом» вниз. В некоторых случаях оказывалось, что карты не имели неподвижной точки, и тогда можно поставить следующий вопрос: в каком месте необходимо проткнуть карты, чтобы две проколотые точки местности были географически наиболее близки? Это обобщение было рассмотрено в работе [3].

Вернемся к формулировке исходной задачи, немного ослабив ее тем, что меньшая карта не обязательно целиком лежит на большей. Целью работы будет получение различных способов построения неподвижной точки двух карт с помощью циркуля и линейки. Как и в приведенных выше работах, будем использовать метод преобразований плоскости.

Пусть карты F и F' с вершинами A, B, C, D и A', B', C', D' лежат в плоскости П, а ψ – преобразование плоскости, переводящее F в F'. Так как карты имеют разный масштаб (будем считать, что карта F больше карты F'), то F в F' переводит некоторое преобразование подобия с коэффициентом .
При этом обе карты лежат «лицом» вверх, поэтому ψ – собственное преобразование (или преобразование первого рода, не меняет ориентацию плоскости). Любое собственное преобразование подобия с коэффициентом имеет единственную неподвижную точку O и представимо в виде композиции гомотетии с центром O и коэффициентом k и поворота около O на некоторый направленный угол α (см., например, [4, стр. 138]), при этом порядок, в котором берется композиция, несущественен, т.е. ψ =
= (Рис. 1). Такое подобие называется поворотной гомотетией (или центрально-подобным вращением). Будем обозначать ее через .

Случай $\alpha = 0$ тривиален, тогда поворотная гомотетия является просто гомотетией, а точка O лежит на пересечении прямых AA' и BB'. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\alpha \neq 0$.

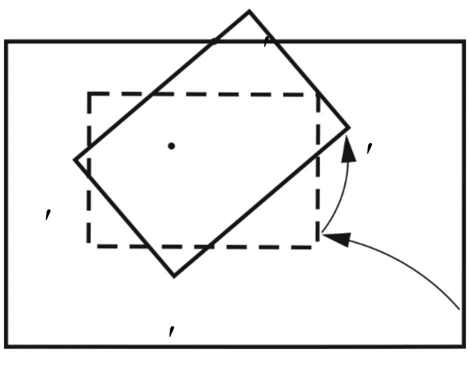

Рис. 1 – Поворотная гомотетия – композиция гомотетии и поворота

Так как гомотетия изменяет расстояние от своего центра до любой точки или прямой в k раз, проходящую через центр прямую переводит в себя, а любую другую прямую – в параллельную ей, то легко получить следующие свойства поворотной гомотетии:

1. Если $(A) = A'$, то $OA' = k\,OA$.

2. Если $(A) = A'$, то $AOA' = \alpha$.

3. Если $(A) = A'$, $(B) = B'$, то направленный угол между прямой AB и прямой $A'B'$ равен α, т.е. прямая $A'B'$ может быть получена поворотом прямой AB на угол α около их общей точки.

4. Если $(l) = l'$, то $d(O, l') = k\,d(O, l)$ (через $d(O, l)$ обозначаем расстояние от точки до прямой).

Так как меньшая карта не обязательно лежит целиком внутри большей, то может оказаться, что неподвижная точка преобразования ψ не принадлежит картам. Тогда считаем, что карты не имеют неподвижной точки.

Первый способ построения неподвижной точки ψ основан на свойстве 1 и приведен в работе [2]. По известным точкам A, A', B, B' и коэффициенту k мы ищем такую точку O, что $OA' = k\,OA$, $OB' = k\,OB$. Множество точек, определяемые каждым из равенств, – окружность Аполлония – геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух заданных точек есть величина постоянная, не равная единице. Эти окружности легко строятся с помощью циркуля и линейки. Для определения нужной из двух точек пересечения надо воспользоваться тем, что треугольники AOB и $A'OB'$ должны иметь одинаковую ориентацию (Рис. 2).

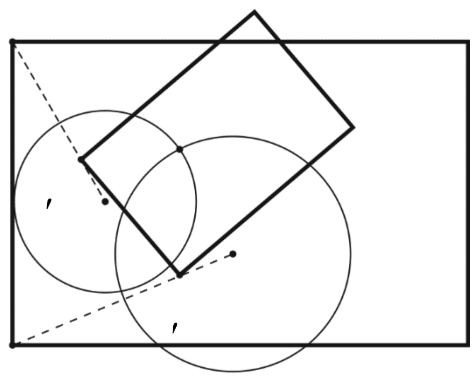

Рис. 2 – Построение неподвижной точки с помощью окружностей Аполлония

Второй способ основан на свойствах 2 и 3. Пусть K и L – точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$ соответственно (Рис. 3).

Тогда $AKA' = AOA' = \alpha$, поэтому точка O должна лежать на окружности, описанной около треугольника AKA'. Аналогично показывается, что O лежит на окружности, описанной около треугольника BLB'. Можно заметить, что эта же окружность описана и около треугольника BKB', поэтому точку L находить не обязательно. Таким образом, одной точкой пересечения окружностей является точка K, а другой – искомая точка O.

Третий способ наименее очевидный из приводимых, однако наиболее эффектный и простой в реализации. По свойству 4 $d(O, A'B') = k\, d(O, AB)$. Может ли этот факт дать какую-либо информацию о положении точки O?

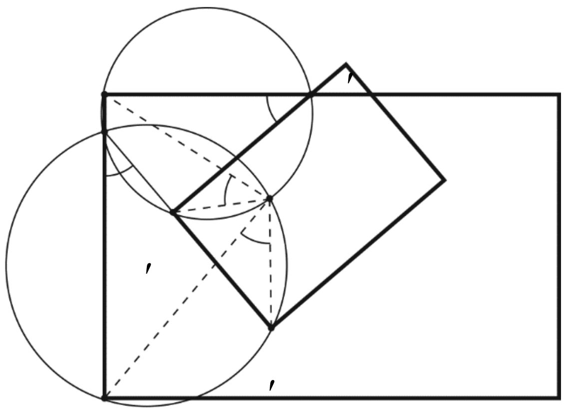

Рис. 3 – Построение неподвижной точки с помощью описанных окружностей

Будем исследовать геометрическое место точек, для каждой из которых расстояния до двух данных пересекающихся прямых находятся в известном отношении. Пусть прямые l и l' пересекаются в точке T (Рис. 4), $X(l, l', k) = \{P \mid d(P, l) = k\, d(P, l)\}$. Понятно, что если некоторая точка принадлежит множеству X, то и вся прямая TP принадлежит X. Множество X образовано двумя проходящими через T прямыми – по одной в каждой паре вертикальных углов, образованных l и l'. Найдем по одной точке на каждой из прямых. Проведем прямую l_3 на произвольном расстоянии h от l, а l_1 и l_2 на расстоянии $k\, h$ от l'. Тогда точки $P_1 = l_1$ l_3 и $P_2 = l_2$ l_3 принадлежат множеству X, значит, X – пара прямых TP_1 и TP_2.

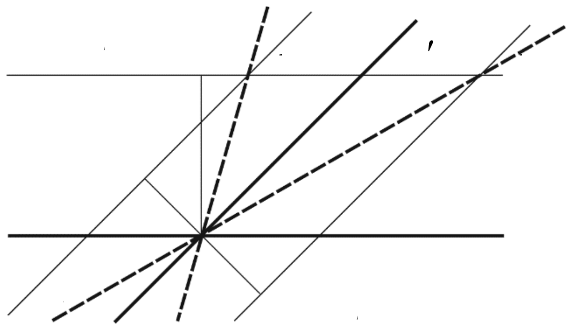

Рис. 4 – Множество точек с постоянным отношением расстояний до двух прямых

Теперь вернемся к нахождению неподвижной точки карт. Она должна принадлежать множествам $X(AB,\ A'B',\ k)$ и $X(AD,\ A'D',\ k)$. Построим сначала первое из них. Пусть $K = AB \quad A'B'$, $L = BC \quad B'C'$, $M = CD \quad C'D'$, $N = AD \quad A'D'$ (Рис. 5). Из двух прямых множества $X(AB,\ A'B',\ k)$ нужно взять ту, которая проходит через образованный прямыми AB и $A'B'$ угол, содержащий малую карту. Покажем, что это прямая KM. Действительно, $d(M,\ AB) = AD$, $d(M,\ A'B') = A'D' = k\,AD$, поэтому $M \quad X(AB, A'B', k)$ и $MK \quad X(AB, A'B', k)$. Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что $LN \quad X(AD,\ A'D',\ k)$. Таким образом, точка O лежит на пересечении прямых MK и LN.

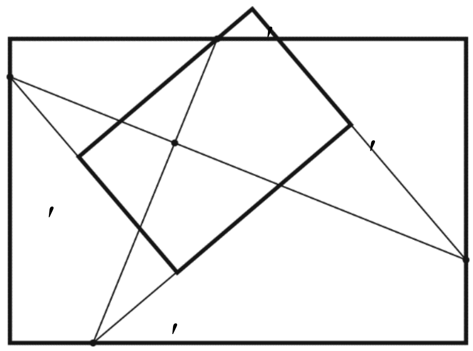

Рис. 5 – Построение неподвижной точки одной линейкой

Простота этого способа удивляет, особенно в сравнении с достаточно сложным обоснованием. Построение неподвижной точки проводится одной линейкой, без использования циркуля, при этом нужно провести не более шести прямых.

Разумеется, способы построения неподвижной точки двух карт не ограничиваются рассмотренными тремя, можно найти и другие решения задачи, и, вероятно, среди них окажется немало вполне оригинальных. Потенциал задачи о картах еще далеко не исчерпан, и она ждет своих исследователей.

Библиографические ссылки

1. Канель-Белов А.Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи ; под ред. В. О. Бугаенко. – 5-е изд., испр. – М. : Изд-во МЦНМО, 2009. – 94 с.
2. Салтавец, С.А. Задача о неподвижных точках двух карт / С.А. Салтавец, В.В. Бреский // Инновационные подходы к обучению физике, математике, информатике: материалы Междунар. студ. науч.-практ. интернет-конф., г. Минск, 22 апреля 2021 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка; редкол. С.И. Василец, А.Ф. Климович (отв. ред.), В.Р. Соболь [и др.]. – Минск : БГПУ, 2021. – С. 165–168.
3. Гриб, Н. В. Геометрические преобразования и задача о двух картах / Н. В. Гриб, К.А. Борисенко // Прикладные вопросы точных наук: Материалы VI Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей (АМТИ, г. Армавир, Россия, 28–29 октября 2022 г.). / научный редактор Л. А. Горовенко ; ответственный редактор О. П. Ровенская ; ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет». Армавир : РИО АГПУ, 2022. – С. 12–15.
4. Атанасян, Л. С. Геометрия : в 2 ч. / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986. – Ч. 1. – 336 с.

УДК 514.1

РАЗРЕЗАНИЕ НА РАВНОВЕЛИКИЕ ЧАСТИ И ОДИН КЛАСС ПЛОСКИХ ФИГУР

Е. Е. Верига, Е. А. Кононович

УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»;

Минск (Республика Беларусь)

Н. В. Гриб, к.ф.-м.н., доцент

CUT INTO EQUAL-SIZED PARTS AND ONE CLASS OF PLANE SHAPES

E. E. Veriga, E. A. Kononovich

Belarusian state pedagogical university named after Maxim Tank;

Minsk (Republic of Belarus)

Scientific adviser – N. V. Grib, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor

Поставлена задача о разрезании плоской фигуры на равновеликие части, исследован класс фигур, для которых задача сводится к делению периметра на равные части.