***А. С. Стребков**, учитель средней школы №213 г. Минска*

***В. А. Шилинец**, доцент кафедры математики БГПУ*

ОДИН ИЗ ВАРИАНТОВ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

В соответствии с Декретом Президента Республики Беларусь «Об отдельных вопросах общего среднего образования» №15 от 17 июля 2008 года учащиеся XI' классов общеобразовательных школ за один учебный год должны изучить материал, изучаемый учащимися ранее на протяжении двух учебных лет. В связи с большим объемом учебного материала и недостатком учебного времени у преподавателей математики возникают определенные методические трудности. В данной статье авторами предлагается один из вариантов изучения учащимися XI' классов темы «Показательная функция. Показательные уравнения». Предлагаемый авторами статьи вариант может быть реализован за два объединенных урока по математике.

Цели урока:

образовательная: ознакомление учащихся с показательной функцией, ее свойствами и графиком; формирование умений и навыков решения показательных уравнений;

развивающая: развитие важнейших личностных качеств, прежде всего в таких направлениях, как точность и ясность мысли, воля и целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность, интуиция, стремление к применению полученных знаний, умение и желание постоянно учиться, уважение к значимости научных знаний, творческая активность и самостоятельность;

воспитательная: формирование интереса к изучению математики; воспитание эстетических качеств и способности воспринимать красоту и гармонию мира.

Ход урока

I. Объявление темы урока, его целей, вводная беседа

Первым этапом учебной деятельности, влияющий на весь дальнейший ее ход и результаты, является мотивация.

Учащиеся с большим интересом воспринимают сведения о применении различных функций в практике. Один из примеров имеется в книге Жюля Верна «Матиас Шандор». На уроке лучше начать с широко известных примеров, а затем перейти к случаю, который описал Жюль Верн.

Радиоактивный распад. После открытия радиоактивности в опытах Беккереля и супругов Кюри возник вопрос: по какому закону происходит распад ядер атомов? Оказалось, что количество распавшегося за единицу времени вещества всегда пропорционально имеющемуся количеству вещества. Промежуток времени, в течении которого распадается половина всех имеющихся ядер атомов, называется периодом полураспада данного вещества. Этот период различен для разных веществ: для урана-238 он равен 4,5 млрд. лет, для радия – 1620 лет, для полония – 84 года, для цезия-137 – 31 год, для иода-131 – 8суток.

Если T – период полураспада данного вещества, то через промежуток времени nT останется $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ доля этого вещества.

Если вначале масса вещества равнялась M, то через промежуток времени $t = nT$ она будет $M \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, т.е. $M \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$.

Диагностика заболеваний. При диагностике почечных болезней часто определяют способность почек выводить из крови радиоактивные изотопы, причем их количество в крови падает по показательному закону.

Рост народонаселения. Изменение числа людей в стране на небольшом отрезке времени описывается формулой $N = N_0 \cdot e^{\alpha \cdot t}$, где N_0 – число людей при $t = 0$, N – число людей в момент времени t, α – константа, $e \approx 2{,}718$.

Очевидное – невероятное (*один человек удерживает корабль*). В книге Жюля Верна «Матиас Шандор» силач Матифу совершил много подвигов, среди которых есть такой.

Готовился спуск на воду трабоколо (трабоколо – небольшой корабль с парусами в форме трапеции). Когда уже начали выбивать из-под киля клинья, удерживающие трабоколо на спусковой дорожке, в гавань влетела нарядная яхта. Спускаемое судно неминуемо должно было врезаться в борт плывущей мимо яхты.

«Вдруг из толпы зрителей выскакивает какой-то человек. Он хватает канат, висящий на носу трабоколо. Но тщетно старается он, упираясь в землю ногами, удержать канат в руках…. Поблизости врыта в землю швартовая пушка. В мгновение ока неизвестный набрасывает на нее трос, который начинает медленно разматываться, а храбрец, рискуя попасть под него и быть раздавленным, сдерживает его с нечеловеческой силой. Это длится секунд десять. Наконец, трос лопнул. Но этих десяти секунд оказалось достаточно. Трабоколо… прошло за кормой яхты на расстоянии не более фута…. Яхта была спасена».

Прочитав классу этот отрывок, учитель задаст вопрос: нужна ли была нечеловеческая сила, чтобы удержать корабль?

Посмотрим, как происходит швартовка корабля. С парохода на пристань бросают канат, на конце которого сделана широкая петля. Человек, стоящий на пристани, надевает петлю на причальную тумбу (или, как сказано в романе, на швартовую пушку), матрос на корабле укладывает канат между кнехтами (небольшими тумбами), укрепленными на борту судна. Сила трения между тросом и кнехтами и останавливает судно. Обычно матрос, обернув канат несколько раз вокруг кнехтов, просто придерживает свободный конец ногой, прижимая его к палубе.

Предположим, это после одного оборота каната вокруг столба сила F_0, приложенная к одному концу каната, уравновешивает в k раз большую силу, приложенную к другому концу.

После ещё одного оборота каната удерживаемая сила возрастает ещё в k раз и становится в k^2 раз больше, чем сила F_0. Для пенькового каната и деревянного столба $k = 2^{\frac{2\pi}{1,75}}$. Оборачивая канат вокруг столба три раза, получаем увеличение в $2^{\frac{6\pi}{1,75}} \approx 1800$ раз.

Примерную силу, необходимую для удерживания спускаемого корабля будем считать равной $400\,кН$, а поскольку канат медленно разматывается, то можно сделать вывод, что Матифу сумел обернуть ее вокруг швартовой пушки хотя бы три раза.

Составляем уравнение: $400000 = 1800 \cdot F_0$, тогда $F_0 \approx 220\,Н$, что эквивалентно $22\,кг$. Любой здоровый взрослый человек вполне может приложить силу в $22\,кг$.

Описанное выше явление мы используем ежедневно, например, завязывая шнурки на ботинках.

II. Повторение

Прежде чем вводить понятие показательной функции желательно повторить понятие степени с действительным показателем и ее свойства. Это можно осуществить в виде устного счета с помощью демонстрационных карточек:

$$8^{\frac{1}{3}};\quad 81^{\frac{3}{4}};\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-1};\quad \left(\frac{3}{11}\right)^{0};\quad 3^{-2};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4};\quad 36^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{3}};\quad 2^{-3}\cdot 8;\quad 16^{\frac{5}{4}};\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot 3^{2};$$

$$(27^3)^{\frac{2}{9}}; \quad 0{,}001^{-\frac{1}{3}}; \quad (-2)^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}; \quad (9^0)^2+81^{-0{,}25}.$$

III. Рассмотрение нового материала

1. *Определение показательной функции*

Показательной функцией называется функция вида

$$y = a^x,$$

где a – заданное число, $a > 0, \quad a \neq 1$.

Примерами показательных функций могут служить следующие функции:

$$y = 2^x; \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad y = 0{,}1^{\,x}.$$

Отработка определения

• Почему в определении показательной функции $y = a^x$ указывается, что число a – положительное?

(Объясняется это тем, что степень отрицательного числа с произвольным показателем, вообще говоря, не определена. Например, не имеет смысла $-7^{\frac{1}{2}}$.)

• Почему в определении показательной функции указывается, что $a \neq 1$?

(При таком a функция $y = a^x$ имеет вид $y = 1$. Такая функция не представляет особого интереса.)

• Почему в определении показательной функции $y = a^x$ указывается, что $a \neq 0$.

(Объясняется это тем, что степень нуля с произвольным показателем, вообще говоря не определена. Например, не имеет смысла $0^0, 0^{-2}$.)

Таким образом, в дальнейшем, говоря о показательной функции $y = a^x$, всегда предполагается, что $a > 0$ и $a \neq 1$?

2. *Построение графика*

Переходим к построению графика показательной функции.

У доски работают два ученика. На одном чертеже строим график функции $y = 2^x$, а на другом – график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Для этого предварительно составим таблицы значений этих функций.

$$y = 2^x$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

3. *Свойства показательной функции*

Используя построенные графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, формулируются свойства показательной функции. Они могут быть сведены в таблицу, которая с помощью технических средств обучения демонстрируется ученикам.

	$a > 0$	$0 < a < 1$
1. Область определения функции $y = a^x$	Множество ***R*** всех действительных чисел	
2. Множество значений функции $y = a^x$	Множество $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных чисел	
3. Монотонность функции $y = a^x$	Возрастает	Убывает
4. Наибольшее и наименьшее значения функции $y = a^x$	Не существует	Не существует

IV. Обучающая самостоятельная работа

Можно предложить учащимся следующую обучающую самостоятельную работу:

Вариант 1

1. Какие из перечисленных функций являются возрастающими:

$$y = 7^x, \quad y = (0,5)^x, \quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^x, \quad y = (0,3)^{-x} \text{ ?}$$

2. Верно ли, что показательная функция:

а) имеет экстремумы;

б) принимает значение, равное 1;

в) является четной?

3. Укажите функцию, график которой изображен на рис. 1:

$$\text{а) } y = x^2; \text{ б) } y = \frac{2}{x}; \text{ в) } y = 3^x; \text{ г) } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

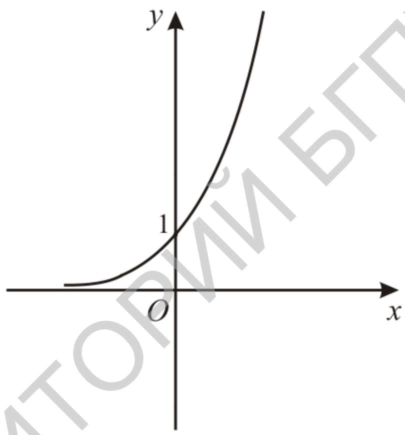

Рис. 1

4. Используя свойство возрастания или убывания показательной функции, сравните числа:

$$3,3^{1,5} \text{ и } 3,3^{1,6}; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} \text{ и } \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}.$$

5. Какое заключение можно сделать относительно m и n, если:

$$\left(\frac{3}{8}\right)^m < \left(\frac{3}{8}\right)^n; \quad (1,7)^m < (1,7)^n \text{ ?}$$

6. Какое заключение можно сделать относительно a $a > 0$, если $a^{\frac{3}{5}} > a^{\frac{1}{5}}$?

7. Сравните значения показательной функции $y = 2^x$:

$$y_1 = 2^{\sqrt{3}}; \quad y_2 = 2^{1,8}; \quad y_3 = 2^{1,5}; \quad y_4 = 2^{0,99}.$$

Расположите их в порядке убывания.

Вариант 2

1. Какие из перечисленных функций являются убывающими:

$$y=\left(\frac{7}{3}\right)^x;\quad y=(0,51)^x;\quad y=7^x;\quad y=\left(\frac{5}{3}\right)^{-x}?$$

2. Верно ли, что показательная функция:

а) принимает значение, равное нулю;

б) принимает только положительные значения;

в) принимает отрицательные значения?

3. Укажите функцию, график которой изображен на рис. 2:

$$\text{а) } y=\frac{x}{3};\ \text{б) } y=x^3;\ \text{в) } y=\left(\frac{1}{5}\right)^x;\ \text{г) } y=5^x.$$

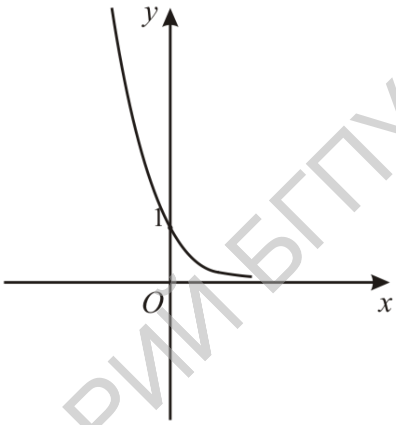

Рис. 2

4. Используя свойство возрастания или убывания показательной функции, сравните числа:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1,5} \text{ и } \left(\frac{4}{3}\right)^{1,4};\quad \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1+\sqrt{3}} \text{ и } \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}.$$

5. Какое заключение можно сделать относительно m и n, если:

$$\left(\frac{9}{7}\right)^m<\left(\frac{9}{7}\right)^n;\quad (0,6)^m<(0,6)^n?$$

6. Какое заключение можно сделать относительно a $a>0$, если $a^{\frac{2}{9}}>a^{\frac{5}{9}}$?

7. Сравните значения показательной функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

$$y_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}};\quad y_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{1,5};\quad y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{1};\quad y_4=\left(\frac{1}{2}\right)^{0,7}.$$

Расположите их в порядке убывания.

V. Решение показательных уравнений

Определение. Показательным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное в показателе степени.

Например, $5^x = 3^{x-1}$; $5^{x^2-7} - 1 = 0$; $1000^x = 100$.

Рассмотрим простейшее показательное уравнение

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Для решения этого уравнения применим графический метод.
Построим в одной и той же системе координат графики функций (рис.3):

$$y = a^x \text{ и } y = b.$$

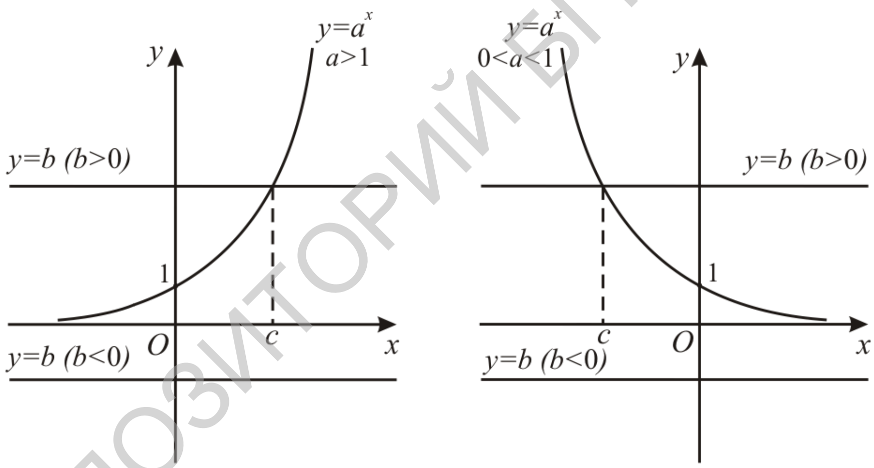

Рис. 3

Тогда абсциссы точек пересечения этих линий будут корнями уравнения (1).

Множество значений показательной функции $y = a^x$ – множество положительных чисел, т.е. график функции $y = a^x$ лежит над осью абсцисс. Поэтому в случае $b \leq 0$ уравнение (1) не имеет решений, так как графики функций $y = a^x$ и $y = b$ не пересекаются (рис.3).

Пусть $b > 0$. Функция $y = a^x$ на промежутке $-\infty;+\infty$ возрастает при $a > 0$ (убывает при $0 < a < 1$) и принимает все положительные значения. Таким образом, график функции $y = a^x$ обязательно пересекается с прямой $y = b$ ($b > 0$) и притом лишь в одной точке (рис.3). Абсцисса точки пересечения и представляет собой корень уравнения (1).

Получаем, что уравнение (1) при любом положительном a, отличном от 1, и $b>0$ имеет единственный корень. Для того чтобы его найти, надо b представить в виде $b=a^c$. Очевидно, что c является решением уравнения $a^x=a^c$ (рис.3).

Рассмотрим основные способы решения показательных уравнений на частных примерах.

Пример 1. Решите уравнение

$$7^{x-5}=7^{16-2x}.$$

Решение. Решение подобных уравнений основано на следующем свойстве степеней: если две степени одного и того же положительного числа, отличного от 1, равны, то равны и их показатели.

В данном случае это свойство степени дает:

$$x-5=16-2x,$$

откуда $x=7$.

***Ответ*:** $x=7$.

Пример 2. Решите уравнение

$$3^x+3^{x+1}=4. \qquad (2)$$

Решение. Вынося в левой части уравнения (2) за скобки общий множитель 3^x, получаем

$$3^x(1+3)=4; \quad 3^x=1,$$

откуда

$$3^x=3^0, \quad x=0.$$

***Ответ*:** $x=0$.

Иногда путем введения новой неизвестной величины показательное уравнение сводится к алгебраическому уравнению.

Пример 3. Решите уравнение

$$4\cdot 2^{2x}+16=65\cdot 2^x. \qquad (3)$$

Решение. Сделаем замену переменной $t=2^x$. Тогда получим:

$$4t^2+16=65t.$$

Отсюда

$$t_1=16, \quad t_2=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, либо $2^x=16$, либо $2^x=\frac{1}{4}$.

Из уравнения $2^x = 16$ имеем $x = 4$. Из уравнения $2^x = \frac{1}{4}$ имеем $x = -2$.

Итак, данное показательное уравнение (3) имеет два корня: $x = 4$ и $x = -2$.

***Ответ*:** $x = -2$, $x = 4$.

VI. Самостоятельная работа

Ученики класса делятся на группы трех уровней и им предлагаются для решения следующие показательные уравнения.

I уровень	**Ответ**	**II уровень**	**Ответ**	**III уровень**	**Ответ**
$5^x = 125$	3	$3^x = \frac{1}{81}$	-4	$9^{-x} = 27$	$-\frac{3}{2}$
$2^{x+3} = 32$	2	$\sqrt{3^x} = \sqrt[3]{9}$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$	4
$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4$	-4	$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$	3	$2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$	$-1; 7$
$3^x + 3^{x+1} = 108$	3	$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$	3	$5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + {}$ $+ 10 = 0$	2
$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x^2} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{5x+3}$	$-\frac{1}{2}; 3$	$2^{x^2+x-2} = 1$	$-2; 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^6-9x^3+8} = 1$	1; 2
$5^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$	-1	$2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$	$\frac{17}{13}$
$5^{2x} - 5^x - 600 = 0$	2	$3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$	4	$3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$	0; 1
$11^x = 19^x$	0	$13^x = 19^{-4x}$	0	$5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 17 + {}$ $+ 7^x \cdot 17 = 0$	0
$5^{2x} \cdot 6^{2x} = 900$	1	$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$	$-1; 4$	$4^{\frac{2x+1}{3-x} - \frac{4-x}{x+1}} =$ $= \sqrt[3]{8} - 1$	$-11;1$

VII. Задание на дом (по вариантам)

***Вариант* 1**

Решите следующие уравнения:

а) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x}=128;$

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+5}=32;$

в) $3^{x^2-17x+63{,}5}=27\sqrt{3};$

г) $2^{|x-1|-3}=1;$

д) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+\sqrt{2-\sqrt{3}}^{\,x}=4;$

е) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3};$

ж) $7^{\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}-7}=1.$

***Вариант* 2**

Решите следующие уравнения:

а) $9\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{1+\frac{1}{2}x}=\frac{1}{81^x};$

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=9^{-1};$

в) $5^{x^2-6x-35}=625\sqrt[3]{25};$

г) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-|x|-2}=1;$

д) $\sqrt{7+\sqrt{48}}^{\,x}+\sqrt{7-\sqrt{48}}^{\,x}=14;$

е) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2};$

ж) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-12+\sqrt{x^2+6}}=1.$

Проверку самостоятельной работы можно осуществить с помощью технических средств обучения или карточек-инструкций.

VIII. Подведение итогов урока, оценка работы учащихся

Список использованной литературы

1. Алгебра: эксперим. учеб. пособие для 12-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с бел. и рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения / Е. П. Кузнецова [и др.]; под ред. Л. Б. Шнепермана. – Мн.: Нар. асвета, 2005. – 296 с.
2. Алгебра: учеб. пособие для 11-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения с 11-летним сроком обучения / Е. П. Кузнецова [и др.]; под ред. Л. Б. Шнепермана.– 2-е изд., перераб.–Мн.: Нар. асвета, 2008.–271 с.
3. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 1992. – 254 с.

4. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. сред. шк. / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; Под. ред. А. Н. Колмогорова. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 320 с.
5. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. сред. шк. / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1992. – 351с.
6. Виленкин, Н. Я. Функции в природе и технике: Кн. для внеклас. чтения IX – X кл. / Н. Я. Виленкин. – 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1985. – 192 с.
7. Панишева, О. В. Применение показательной функции / О. В. Панишева // Математика в школе. – 2001. – №5. – с. 12-13.
8. Шилинец, В. А., Шлыков, В. В. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, и их системы: Уч.-мет. пособие для учителей / В. А. Шилинец, В. В. Шлыков. – Мн.: Нар. асвета, 1998. – 104 с.