УДК 517.927.25

Н. В. Гриб,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и геометрии БГПУ

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Введение. Обозначим через $VH_{2\pi}^{\alpha}$ класс непрерывных 2π-периодических функций, имеющих ограниченную вариацию на отрезке $[0,2\pi]$, $V(f,[0,2\pi])=V$, и удовлетворяющих условию Липшица–Гельдера $Lip\,\alpha$, $0<\alpha<1$.

Равномерные рациональные приближения таких функций изучались Е. П. Долженко и А. А. Абдугаппаровым [1], Г. Фройдом [2], А. П. Булановым [3]. В случае отрезка окончательный результат был получен А. А. Пекарским [4] и П. П. Петрушевым [5], в периодичском случае – А. А. Пекарским [6] с помощью метода последовательных усреднений. Из этого результата, в частности, следует, что наилучшие равномерные приближения гельдеровских функций ограниченной вариации рациональными функциями степени не выше n имеют порядок $\ln n/n$. Е. А. Ровба [7] и А. А. Ляликов [8] использовали метод интегральных рациональных операторов для рациональной аппроксимации гельдеровских функций, имеющих ограниченную вариацию на конечном отрезке. В настоящей работе операторный метод применяется для приближения функций класса $VH_{2\pi}^{\alpha}$.

Интегральные рациональные операторы типа Валле Пуссена и их свойства. Интегральные рациональные операторы типа Валле Пуссена для приближения непрерывных на вещественной прямой функций были построены В. Н. Русаком [9], в [10] им построены аналогичные операторы, действующие в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций. Несколько изменим их конструкцию, уменьшив степень рациональной функции, являющейся значением оператора. Основные аппроксимационные свойства операторов при этом не изменятся.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, $|\alpha_k|<1$ – последовательность комплексных чисел,

$\pi_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}$ – круговое произведение Бляшке по этим числам. Поскольку $|\pi_n(z)|=1$ на единичной окружности, то выполняется равенство

$$\pi_n(e^{iu})=e^{i\Phi_n(u)}, \tag{1}$$

где

$$\Phi_n(u)=\arg\pi_n(e^{iu}),$$

$$0\le\Phi_n(0)=\arg\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k}<2\pi.$$

Для функции $f\in C_{2\pi}$ построим рациональный оператор V_{2n-1}, полагая

$$V_{2n-1}(u,f)=\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\int_0^{2\pi}f(t)K_n(u,t)\,dt,$$

где

$$K_n(u,t)=\frac{\sin^2\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(t)\right)-\sin^2\dfrac{\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(t)\right)}{2}}{\sin^2\dfrac{u-t}{2}}$$

является ядром типа Валле Пуссена.

Лемма 1. Оператор V_{2n-1}

1) любую функцию $f\in C_{2\pi}$ отображает в тригонометрическую рациональную функцию степени не выше $2n-1$;
2) является точным на константах;
3) нормы операторов V_{2n-1} как операторов из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ равномерно ограничены, а именно

$$\|V_{2n-1}\|_{C_{2\pi}}=\left\|\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\int_0^{2\pi}|K_n(u,t)|\,dt\right\|\le 3.$$

Доказательство этих свойств проходит так же, как в [9; 10].

Как известно из [9; 10], при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ операторы типа Валле Пуссена осуществляют аппроксимацию порядка наилучших рациональных приближений. Далее будет предложен метод расположения параметров, при котором уклонение оператора V_{2n-1} от функций из $VH_{2\pi}^{\alpha}$ принимает минимальный порядок.

Вспомогательные леммы

Лемма 2. Пусть $y \ge 4$, $x \ge y+2$,
$$N=[xy]+1\le n,$$
$$0<h\le 1,\ \rho=e^{-\frac{1}{y}},$$
параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$ расположены на радиальном луче по правилу $\alpha_k=\left(1-h\rho^k\right)e^{i\tau}$. Тогда справедливы оценки
$$\Phi_n'(u)\ge\begin{cases}\dfrac{ye^x}{2h}, & 2\sin\left|\dfrac{u-\tau}{2}\right|\le h\rho^N,\\[2mm] \dfrac{y}{5\left|\sin\dfrac{u-\tau}{2}\right|}, & h\rho^N\le 2\sin\left|\dfrac{u-\tau}{2}\right|\le h.\end{cases}$$

Доказательство. Пользуясь равенством (1), нетрудно проверить, что
$$\Phi_n'(u)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(e^{iu}-\alpha_k\right)\left(e^{-iu}-\bar\alpha_k\right)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-|\alpha_k|)^2+4|\alpha_k|\sin^2\dfrac{u-\arg\alpha_k}{2}}.$$

Обозначим $s=2\sin\left|\dfrac{u-\tau}{2}\right|$. При $s\le h\rho^N$ с учетом неравенства $1-e^{-t}\le t$ получим
$$\Phi_n'(u)\ge\sum_{k=1}^{N}\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-|\alpha_k|)^2+4|\alpha_k|\sin^2\dfrac{u-\tau}{2}}\ge$$
$$\ge\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-|\alpha_k|)^2}\ge\frac{2-h}{2h}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\rho^k}=$$
$$=\frac{2-h}{2h}\frac{\rho^{-1}(\rho^{-N}-1)}{\rho^{-1}-1}=\frac{2-h}{2h}\frac{(\rho^{-N}-1)}{1-\rho}\ge\frac{ye^x}{2h}.$$

Пусть теперь $h\rho^N<s\le h$. Тогда $h\rho^l\le s\le h\rho^{l-1}$ при некотором натуральном l, $1\le l\le N$. В таком случае будем иметь
$$\Phi_n'(u)>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-|\alpha_k|)^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=l}^{N}\frac{1-|\alpha_k|^2}{s^2}\ge$$
$$\ge\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{\rho^k}+\frac{h}{2s^2}\sum_{k=l}^{N}\rho^k=$$
$$=\frac{1}{2h}\frac{\rho^{-1}(\rho^{1-l}-1)}{\rho^{-1}-1}+\frac{h}{2s^2}\frac{\rho^l(\rho^{N-l+1}-1)}{\rho-1}=$$
$$=\frac{1}{2(1-\rho)}\left(\frac{\rho-\rho^l}{h\rho^l}+\frac{h\rho^{l-1}(\rho-\rho^{N-l+2})}{s^2}\right)\ge$$
$$\ge\frac{y(2\rho-\rho^l-\rho^{N-l+2})}{2s}\ge\frac{2y}{5s},$$
тем самым лемма доказана.

Лемма 3. Пусть параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$ выбраны как в лемме 2, $z=ve^{i\theta}$. Если $1-h\le v\le 1-h\rho^N$, $\tau=\theta$ или $v=1-h$, $|\tau-\theta|\le\dfrac{h}{2}$, то имеет место неравенство $|\pi_n(z)|\le e^{-\frac{y}{2}}$.

Доказательство. При $1-h\le v\le 1-h\rho^N$, $\tau=\theta$ доказательство проводится аналогично доказательству подобной леммы в [10].

Пусть теперь $v=1-h$, $|\tau-\theta|\le\dfrac{h}{2}$. Получим оценку для $|\pi_n(z)|$ в виде
$$|\pi_n(z)|\le\prod_{k=1}^{N}\left|\frac{z-\alpha_k}{1-z\bar\alpha_k}\right|=\prod_{k=1}^{N}\left|\frac{ve^{i\theta}-|\alpha_k|e^{i\tau}}{1-ve^{i\theta}|\alpha_k|e^{-i\tau}}\right|=$$
$$=\prod_{k=1}^{N}\sqrt{\frac{\left(v\cos\theta-|\alpha_k|\cos\tau\right)^2+\left(v\sin\theta-|\alpha_k|\sin\tau\right)^2}{\left(1-v|\alpha_k|\cos(\theta-\tau)\right)^2+\left(v|\alpha_k|\sin(\theta-\tau)\right)^2}}=$$
$$=\prod_{k=1}^{N}\sqrt{\frac{v^2+|\alpha_k|^2-2v|\alpha_k|\left(\cos\theta\cos\tau+\sin\theta\sin\tau\right)}{1+v^2|\alpha_k|^2-2v|\alpha_k|\cos(\theta-\tau)}}=$$
$$=\prod_{k=1}^{N}\sqrt{1-\frac{1+v^2|\alpha_k|^2-v^2-|\alpha_k|^2}{1+v^2|\alpha_k|^2-2v|\alpha_k|\cos(\theta-\tau)}}\le \tag{2}$$
$$\le\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1+v^2|\alpha_k|^2-v^2-|\alpha_k|^2}{1+v^2|\alpha_k|^2-2v|\alpha_k|\cos(\theta-\tau)}\right)=$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-v^2\right)\left(1-|\alpha_k|^2\right)}{(1-v|\alpha_k|)^2+4v|\alpha_k|\sin^2\left(\dfrac{\theta-\tau}{2}\right)}\right).$$

Оценим сумму в показателе степени.

Пусть $1-h\le v\le 1-h\rho^N$, $\tau=\theta$ и $1-h\rho^{l-1}\le v\le 1-h\rho^l$, $1\le l\le N$.

В этом случае
$$\Sigma:=\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-v^2\right)\left(1-|\alpha_k|^2\right)}{(1-v|\alpha_k|)^2+4v|\alpha_k|\sin^2\left(\dfrac{\theta-\tau}{2}\right)}>$$
$$>\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(1-(1-h)^2\right)\left(1-\left(1-h\rho^k\right)^2\right)}{\left(1-(1-h)\left(1-h\rho^k\right)\right)^2+\dfrac{h^2}{4}}=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{h^2\,(2-h)\left(2-h\rho^k\right)\rho^k}{\left(h+h\rho^k-h^2\rho^k\right)^2+\dfrac{h^2}{4}}=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{(2-h)\left(2-h\rho^k\right)\rho^k}{\left(1+\rho^k-h\rho^k\right)^2+\dfrac{1}{4}}.$$

Исследуя функцию $g(h)=\dfrac{(2-h)(2-ha)a}{(1+a-ha)^2+\frac{1}{4}}$ на монотонность с помощью производной, можно убедиться, что при $a>0$ она убывает на отрезке $[0,1]$, поэтому

$$\Sigma>\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{N}\left(2-\rho^k\right)\rho^k=$$

$$=\frac{4}{5}\left(2\frac{\rho\left(1-\rho^N\right)}{1-\rho}-\frac{\rho^2\left(1-\rho^{2N}\right)}{1-\rho^2}\right)>$$

$$>\frac{4}{5}\left(2y\rho\left(1-\rho^N\right)-\frac{y}{2}\rho^2\left(1-\rho^{2N}\right)\right)>y.$$

Подставив найденную оценку в (2), получим необходимое неравенство.

Лемма 4. Пусть на каждом из лучей $\arg z=\tau_1$ и $\arg z=\tau_2$ расположены по N параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$ по правилу леммы 2, причем $0<h=\tau_2-\tau_1\le 1$. Если $\min\left\{\left|\sin\frac{u-\tau_1}{2}\right|,\left|\sin\frac{u-\tau_2}{2}\right|\right\}\ge he^{-x+y}$, то верно неравенство $\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}K_n(u,t)\,dt\right|<\dfrac{12he^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin\frac{u-\tau_1}{2}\sin\frac{u-\tau_2}{2}\right|}$.

Доказательство. При использовании комплексных переменных $z=e^{iu}$, $\xi=e^{iv}$ ядро оператора представимо в виде [10]

$$K_n(u,v)=\left(\frac{\pi_n^2(z)}{\pi_n^2(\xi)}-\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)}+\frac{\pi_n^2(\xi)}{\pi_n^2(z)}-\frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)}\right)\frac{z\xi}{(z-\xi)^2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$K_n(u,v)=\left(\frac{\pi_n(\xi)\left(\pi_n(\xi)-\pi_n(z)\right)}{\pi_n^2(z)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{\pi_n(\xi)}\left(\overline{\pi_n(\xi)}-\overline{\pi_n(z)}\right)}{\overline{\pi_n^2(z)}}\right)\frac{1}{-4\sin^2\frac{u-v}{2}},$$

поэтому

$$\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}K_n(u,t)\,dt\right|\le\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\pi_n\left(e^{it}\right)\left(\pi_n\left(e^{it}\right)-\pi_n\left(e^{iu}\right)\right)}{4\pi_n^2\left(e^{iu}\right)\sin^2\frac{u-t}{2}}dt\right|+$$
$$+\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\overline{\pi_n\left(e^{it}\right)}\left(\overline{\pi_n\left(e^{it}\right)}-\overline{\pi_n\left(e^{iu}\right)}\right)}{4\overline{\pi_n^2\left(e^{iu}\right)}\sin^2\frac{u-t}{2}}dt\right|=\qquad(3)$$
$$=\frac{1}{2}\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\pi_n\left(e^{it}\right)\left(\pi_n\left(e^{it}\right)-\pi_n\left(e^{iu}\right)\right)}{\sin^2\frac{u-t}{2}}dt\right|=:\frac{1}{2}|I|.$$

Заменим отрезок интегрирования $[\tau_1,\tau_2]$ на контур $\Gamma=\bigcup_{k=1}^{5}\Gamma_k$, где

$$\Gamma_1=\left\{w\mid w=\tau_1+it,0\le t\le-\ln\left(1-h\rho^N\right)\right\},$$
$$\Gamma_2=\left\{w\mid w=\tau_1+it,-\ln\left(1-h\rho^N\right)\le t\le-\ln(1-h)\right\},$$
$$\Gamma_3=\left\{w\mid w=t-i\ln(1-h),\ \tau_1\le t\le\tau_2\right\},$$
$$\Gamma_4=\left\{w\mid w=\tau_2+it,-\ln\left(1-h\rho^N\right)\le t\le-\ln(1-h)\right\},$$
$$\Gamma_5=\left\{w\mid w=\tau_2+it,0\le t\le-\ln\left(1-h\rho^N\right)\right\},$$

получим

$$I=\sum_{k=1}^{5}\int_{\Gamma_k}\frac{\pi_n\left(e^{iw}\right)\left(\pi_n\left(e^{iw}\right)-\pi_n\left(e^{iu}\right)\right)}{\sin^2\frac{u-w}{2}}dw=:\sum_{k=1}^{5}I_k.\qquad(4)$$

Для определенности рассмотрим случай $0<\tau_1-u\le\pi$. Согласно условию леммы,

$$\sin\frac{\tau_2-u}{2}=\sin\frac{\tau_2-\tau_1+\tau_1-u}{2}<$$
$$<\sin\frac{\tau_2-\tau_1}{2}+\sin\frac{\tau_1-u}{2}<\frac{h}{2}+\sin\frac{\tau_1-u}{2}\le$$
$$\le\frac{e^{x-y}}{2}\sin\frac{\tau_1-u}{2}+\sin\frac{\tau_1-u}{2}<e^{x-y}\sin\frac{\tau_1-u}{2},$$

поэтому $\sin\frac{\tau_1-u}{2}>e^{y-x}\sin\frac{\tau_2-u}{2}$, следовательно, для оценки I_1 будем иметь

$$|I_1|\le2\int_{\Gamma_1}\frac{\left|\pi_n\left(e^{iw}\right)\right|}{\left|\sin^2\frac{u-w}{2}\right|}|dw|\le-\frac{2\ln\left(1-h\rho^N\right)}{\sin^2\frac{\tau_1-u}{2}}\le$$
$$\le\frac{4he^{-\frac{[xy]}{y}+1}e^{x-y}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}\le\frac{4he^{-y}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}.$$

Воспользовавшись леммой 3 и неравенством

$$\left|\sin^2(a+ib)\right|=\frac{e^{2b}+e^{-2b}-2\cos2a}{4}=$$
$$=\frac{e^{2b}+e^{-2b}-2+4\sin^2a}{4}\ge\sin^2a+b^2,\qquad(5)$$

получим

$$|I_2|\le2\int_{\Gamma_2}\frac{\left|\pi_n\left(e^{iw}\right)\right|}{\left|\sin^2\frac{u-w}{2}\right|}|dw|<$$
$$<2e^{-\frac{y}{2}}\int_0^{-\ln(1-h)}\frac{dt}{\left|\sin^2\frac{u-(\tau_1+it)}{2}\right|}<$$

$$< 2e^{-\frac{y}{2}} \int\limits_0^{-\ln(1-h)} \frac{dt}{\sin^2\frac{\tau_1-u}{2}+\frac{t^2}{4}} =$$

$$= 4e^{-\frac{y}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\frac{-\ln(1-h)}{\sin\frac{\tau_1-u}{2}}}{\sin\frac{\tau_1-u}{2}}.$$

Если $2/3<h\le 1$, то

$$|I_2| < \frac{2\pi e^{-\frac{y}{3}}}{\sin\frac{\tau_1-u}{2}} < \frac{3\pi h e^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}.$$

Пусть теперь $0<h\le 2/3$, тогда $-\ln(1-h)<1{,}65h$. При $\sin\frac{\tau_1-u}{2}\le h$

$$\sin\frac{\tau_2-u}{2} < \frac{h}{2}+\sin\frac{\tau_1-u}{2} \le \frac{3}{2}h,$$

поэтому

$$|I_2| < \frac{2\pi e^{-\frac{y}{2}}}{\sin\frac{\tau_1-u}{2}} \le \frac{3\pi h e^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}.$$

Если же $\sin\frac{\tau_1-u}{2}>h$, то

$$\sin\frac{\tau_2-u}{2}<\frac{h}{2}+\sin\frac{\tau_1-u}{2}<\frac{3}{2}\sin\frac{\tau_1-u}{2},$$

следовательно,

$$|I_2|<\frac{6{,}6e^{-\frac{y}{2}}h}{\sin^2\frac{\tau_1-u}{2}} \le \frac{9{,}9he^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}.$$

В любом случае

$$|I_2|<\frac{9{,}9he^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}.$$

Снова пользуясь леммой 3 и неравенством (5), для I_3 найдем

$$|I_3|\le 2e^{-\frac{y}{3}}\int\limits_{\Gamma_3}\frac{1}{\left|\sin^2\frac{u-w}{2}\right|}|dw|<$$

$$<\frac{2he^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin^2\frac{u-(\tau_1-i\ln(1-h))}{2}\right|}=\frac{2he^{-\frac{y}{2}}}{\sin^2\frac{\tau_1-u}{2}+\frac{h^2}{4}}\le$$

$$\le\frac{4he^{-\frac{y}{2}}}{\left(\sin\frac{\tau_1-u}{2}+\frac{h}{4}\right)^2}<\frac{4he^{-\frac{y}{2}}}{\sin\frac{\tau_1-u}{2}\left(\sin\frac{\tau_1-u}{2}+\sin\frac{h}{2}\right)}<$$

$$<\frac{4he^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}.$$

Оценивая I_4 подобно I_2, получим

$$|I_4|\le 2e^{-\frac{y}{2}}\int\limits_{\Gamma_4}\frac{|dw|}{\left|\sin^2\frac{u-w}{2}\right|}<4e^{-\frac{y}{2}}\frac{\operatorname{arctg}\frac{-\ln(1-h)}{\sin\frac{\tau_2-u}{2}}}{\sin\frac{\tau_2-u}{2}}.$$

Если $3/4<h\le 1$, то

$$|I_4|<\frac{2\pi e^{-\frac{y}{2}}}{\sin\frac{\tau_2-u}{2}}\le\frac{8\pi he^{-\frac{y}{2}}}{3\left|\sin\frac{\tau_2-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|},$$

при $0<h\le 3/4$ выполняется $-\ln(1-h)<2h$, поэтому

$$|I_4|<\frac{8e^{-\frac{y}{2}}}{\sin^2\frac{\tau_2-u}{2}}<\frac{8e^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|},$$

в любом случае

$$|I_4|<\frac{8\pi he^{-\frac{y}{2}}}{3\left|\sin\frac{\tau_2-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}.$$

И наконец,

$$|I_5|\le 2\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\left|\pi_n\left(e^{iw}\right)\right|}{\left|\sin^2\frac{u-w}{2}\right|}|dw|\le-\frac{2\ln\left(1-h\rho^N\right)}{\sin^2\frac{\tau_2-u}{2}}<$$

$$<\frac{3he^{-\frac{[xy]}{y}+1}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}<\frac{3he^{-x}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|}.$$

Подставляя полученные оценки в (4), найдем

$$I<\frac{24he^{-\frac{y}{2}}}{\left|\sin\frac{\tau_1-u}{2}\sin\frac{\tau_2-u}{2}\right|},$$

откуда с учетом (3) следует справедливость утверждения леммы.

Оценка уклонения рационального оператора.

Теорема 1. Если $f\in VH^{\alpha}_{2\pi}$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ справедлива оценка

$$\|V_{2n-1}(u,f)-f(u)\|\le(VC_1+C_2)\frac{\ln n}{n},$$

где C_1,C_2 – константы, зависящие только от α.

Доказательство. Пусть $\ln_j n=\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{j\ \text{раз}} n$ и $e_j=\underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{j\ \text{раз}}1$ – повторные логарифм и экспонента. Для данного натурального n возьмем натуральное η такое, что $1<\ln_\eta n\le e$. Непосредственно проверяются соотношения

$$\sum_{k=1}^{\eta}\frac{1}{\ln_k n}<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_k}<1{,}45,\qquad \sum_{k=1}^{\eta}\frac{1}{\ln_k^2 n}<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e_k^2}<1{,}15. \qquad (6)$$

Определим числа m_μ, V_μ, x_μ, y_μ равенствами

$$m_\mu=\left[\frac{\alpha n}{21\ln n\ln_\mu^2 n}\right],$$
$$V_\mu=\frac{24V\ln n\ln_\mu^2 n}{\alpha n},\quad \mu=\overline{1,\eta},$$
$$x_1=\frac{3}{\alpha}\ln n,\quad y_1=2\ln n, \qquad (7)$$
$$x_\mu=\frac{3}{2\alpha}\ln n,$$
$$y_\mu=4\ln_\mu n,$$
$$\mu=\overline{2,\eta}.$$

Не ограничивая общность, в дальнейшем будем считать n достаточно большим для выполнения неравенств $(m_\mu-7)V_\mu\ge V,\mu=\overline{1,\eta}$.

Сделаем η разбиений отрезка $[0,2\pi]$ точками $\{t_k^\mu\}_{k=1}^{m_\mu+1}$, $\mu=\overline{1,\eta}$ по правилу

$$0=t_1^\mu<t_2^\mu<\ldots<t_{m_\mu+1}^\mu=2\pi,$$
$$t_{k+1}^\mu-t_k^\mu\le 1,$$
$$V\left(f,[t_k^\mu,t_{k+1}^\mu]\right)\le V_\mu.$$

Эти разбиения не однозначны, но их возможность следует из соотношения $(m_\mu-7)V_\mu\ge V$. Объединение точек разбиения с первого по μ-е включительно будем называть точками разбиения μ-го ранга, $0=\tau_1^\mu<\tau_2^\mu<\ldots<\tau_{n_\mu+1}^\mu=2\pi$, на основании (6) их количество n_μ удовлетворяет неравенству

$$n_\mu=\sum_{k=1}^{\mu}m_\mu=\sum_{k=1}^{\mu}\left[\frac{\alpha n}{21\ln n\ln_k^2 n}\right]\le\left[\frac{\alpha n}{18\ln n\ln_\mu^2 n}\right].$$

Обозначим

$$\rho_\mu=\exp(-1/y_\mu),\ N_\mu=[x_\mu y_\mu]+1,\ \Delta\tau_k^\mu=\tau_{\mu+1}^k-\tau_\mu^k.$$

На каждом радиальном луче

$$\arg\theta=\tau_l^\mu,\ \mu=\overline{1,\eta},\ l=\overline{1,n_\mu},$$

разместим по $2N_\mu$ параметров α_k в точках

$$\left(1-\Delta\tau_{l-1}^\mu\rho_\mu^k\right)e^{i\tau_l^\mu},k=\overline{1,N_\mu},\qquad \left(1-\Delta\tau_l^\mu\rho_\mu^k\right)e^{i\tau_l^\mu},k=\overline{1,N_\mu}. \qquad (8)$$

С учетом (6) общее число n_0 задействованных параметров α_k удовлетворяет соотношению

$$n_0=2\sum_{\mu=1}^{\eta}n_\mu N_\mu\le$$
$$\le 2\sum_{\mu=1}^{\eta}\frac{\alpha n}{18\ln n\ln_\mu^2 n}\left(\frac{6}{\alpha}\ln n\ln_\mu n+1\right)<n.$$

Все остальные $n-n_0$ параметров можно взять равными нулю.

На основании точности оператора V_{2n-1} на константах представим уклонение рациональной функции $V_{2n-1}(u,f)$ от $f(u)$ в форме

$$V_{2n-1}(u,f)-f(u)=\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\int_0^{2\pi}\left(f(t)-f(u)\right)K_n(u,t)dt=$$
$$=\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\left(\int_0^u+\int_u^{2\pi}\right)\left(f(t)-f(u)\right)K_n(u,t)dt=:I'+I''.$$

Не ограничивая общность, будем считать, что $u=\pi$. Зададим окрестность

$$\delta(u)=\left\{x\,|\,0\le x\le 2\pi,\left|\sin\frac{u-x}{2}\right|\le\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=:d\right\}.$$

Числа s_μ, $p_{k,\mu}$ и q_μ определим из отношений $u\in\left[\tau_{s_\mu}^\mu,\tau_{s_\mu+1}^\mu\right]$, $\left[\tau_k^\mu,\tau_{k+1}^\mu\right]\in\left[\tau_{p_{k,\mu}}^{\mu-1},\tau_{p_{k,\mu}+1}^{\mu-1}\right]$, а $\tau_{q_\mu}^\mu$ – наименьшая точка μ-го ранга, лежащая правее $\delta(u)$. Тогда I'' можно записать в виде

$$I''=\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\sum_{k=s_1+1}^{n_1}\int_{\tau_k^1}^{\tau_{k+1}^1}\left(f(\tau_k^1)-f(u)\right)K_n(u,t)dt+$$
$$+\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\sum_{\mu=2}^{\eta}\sum_{k=s_\mu+1}^{n_\mu}\int_{\tau_k^\mu}^{\tau_{k+1}^\mu}\left(f(\tau_k^\mu)-f\left(\hat{\tau}_{p_{k,\mu}}^{\mu-1}\right)\right)K_n(u,t)dt+ \qquad (9)$$
$$+\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\sum_{k=s_\eta+1}^{n_\eta}\int_{\tau_k^\eta}^{\tau_{k+1}^\eta}\left(f(t)-f(\tau_k^\eta)\right)K_n(u,t)dt=:$$
$$=:\sum_{\mu=1}^{\eta}I_\mu''+I_*'',$$

где $\hat{\tau}_k^\mu=\max\{\tau_k^\mu,u\}$. В свою очередь I_μ'' представимо в форме

$$I_\mu''=\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\left(\sum_{k=s_\mu+1}^{q_\mu-1}+\sum_{k=q_\mu}^{n_\mu}\right)\times$$
$$\times\int_{\tau_k^\mu}^{\tau_{k+1}^\mu}\left(f(\tau_k^\mu)-f\left(\hat{\tau}_{p_{k,\mu}}^{\mu-1}\right)\right)K_n(u,t)dt=:I_{\mu,1}''+I_{\mu,2}''. \qquad (10)$$

Тогда из условия Липшица–Гельдера и ограниченности норм оператора V_{2n-1} следует

$$\left|\sum_{\mu=1}^{\eta} I''_{\mu,1}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{3\Phi'_n(u)}\sum_{\mu=1}^{\eta}\sum_{k=s_\mu+1}^{q_\mu-1}\int_{\tau_k^\mu}^{\tau_{k+1}^\mu}(2\arcsin d)^\alpha\left|K_n(u,t)\right|dt \le \qquad (11)$$

$$\le \frac{(2d)^\alpha}{3\Phi'_n(u)}\int_0^{2\pi}\left|K_n(u,t)\right|dt \le \frac{3\cdot 2^{\frac{1}{\alpha}}\ln n}{n}.$$

Легко убедиться, что для $\mu=\overline{1,\eta}$ выполняется неравенство $d>e^{-x_\mu+y_\mu}$, поэтому, пользуясь (7), (8), леммой 4 и следующим из леммы 2 неравенством

$$\frac{1}{\Phi'_n(u)} \le \frac{1}{y_\mu}\max\left\{2\Delta\tau_{s_\mu}^\mu e^{-x_\mu},\ 5\sin\frac{\tau_{s_\mu+1}^\mu-u}{2}\right\},$$

получим

$$I''_{1,2} \le \frac{V}{3\Phi'_n(u)}\sum_{k\,|\,\tau_k^1\notin\delta(u)}\left|\int_{\tau_k^1}^{\tau_{k+1}^1}K_n(u,t)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{12Ve^{-\frac{y_1}{2}}}{3\Phi'_n(u)}\sum_{k=q_1}^{n_1}\frac{\tau_{k+1}^1-\tau_k^1}{\left|\sin\frac{\tau_k^1-u}{2}\ \sin\frac{\tau_{k+1}^1-u}{2}\right|} <$$

$$< \frac{4\pi V}{\Phi'_n(u)n\sin\frac{\tau_{q_1}^1-u}{2}} \le \frac{20\pi V\sin\frac{\tau_{s_1+1}^1-u}{2}}{y_1 n\sin\frac{\tau_{q_1}^1-u}{2}} \le$$

$$\le \frac{20\pi V}{y_1 n} = \frac{10\pi V}{n\ln n},$$

и при $\mu=\overline{2,\eta}$

$$I''_{\mu,2} \le \frac{V_{\mu-1}}{3\Phi'_n(u)}\sum_{k=q_\mu}^{n_\mu}\left|\int_{\tau_k^\mu}^{\tau_{k+1}^\mu}K_n(u,t)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{12V_{\mu-1}e^{-\frac{y_\mu}{2}}}{3\Phi'_n(u)}\sum_{k=q_\mu}^{n_\mu}\frac{\tau_{k+1}^\mu-\tau_k^\mu}{\left|\sin\frac{\tau_k^\mu-u}{2}\ \sin\frac{\tau_{k+1}^\mu-u}{2}\right|} <$$

$$< \frac{4\pi V_{\mu-1}e^{-\frac{y_\mu}{2}}}{\Phi'_n(u)\sin\frac{\tau_{q_\mu}^\mu-u}{2}} \le \frac{20\pi V_{\mu-1}e^{-\frac{y_\mu}{2}}\sin\frac{\tau_{s_\mu+1}^\mu-u}{2}}{y_\mu\sin\frac{\tau_{q_\mu}^\mu-u}{2}} \le$$

$$\le \frac{20\cdot 24\pi V\ln n\ln_{\mu-1}^2 n}{2\alpha n\ln_{\mu-1}^2 n\ln_\mu n} \le \frac{240V\pi}{\alpha\ln_\mu n}\frac{\ln n}{n},$$

следовательно,

$$\sum_{\mu=1}^{\eta} I''_{\mu,2} \le \frac{V}{n}\left(\frac{10\pi}{\ln n}+\frac{240\pi}{\alpha}\ln n\sum_{\mu=2}^{\eta}\frac{1}{\ln_\mu n}\right) < \qquad (12)$$

$$< \frac{350\pi V}{\alpha}\frac{\ln n}{n}.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся (7) и ограниченностью норм оператора V_{2n-1}

$$\left|I''_*\right| \le \frac{V_\eta}{3\Phi'_n(u)}\sum_{k=q_\eta}^{n_\eta}\int_{\tau_k^\eta}^{\tau_{k+1}^\eta}\left|K_n(u,t)\right|dt < \qquad (13)$$

$$< \frac{72V\ln n\ln_\eta^2 n}{\alpha n} \le \frac{72e^2V\ln n}{\alpha n}.$$

Из соотношений (9–13) следует

$$I'' < \left(\frac{V\left(72e^2+350\pi\right)}{\alpha}+3\cdot 2^\alpha\right)\frac{\ln n}{n}.$$

Для I' верна такая же оценка и, таким образом, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдугаппаров, А. А.* Приближение функций с выпуклой производной посредством рациональных функций : автореф. … дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / А. А. Абдугаппаров ; Калининский гос. ун-т. – Калинин, 1974. – 10 с.
2. *Freud, G.* Über die Approximation reeler functionen durch rationale gebrochene functionen / G. *Freud* // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. – 1966. – Vol. 17. – N. 3–4. – P. 313–324.
3. *Буланов, А. П.* Рациональные приближения непрерывных функций с конечным изменением / А. П. Буланов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Т. 39, № 5. – С. 1142–1181.
4. *Пекарский, А. А.* Рациональная аппроксимация непрерывных функций с заданным модулем непрерывности и модулем изменения / А. А. Пекарский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1978. – № 5. – С. 34–39.
5. *Петрушев, П. П.* Равномерные рациональные приближения функций ограниченной вариации / П. П. Петрушев // ПЛИСКА Бълг. матем. студии. – 1977. – № 1. – С. 145–155.
6. *Пекарский, А. А.* Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича / А. А. Пекарский // Матем. сб. – 1982. – Т. 117, № 1. – С. 114–130.
7. *Ровба, Е. А.* О приближении рациональными операторами Фейера и Джексона функций ограниченной вариации / Е. А. Ровба // Доклады НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 4. – С. 13–17.

8. *Ляликов, А.* С. Приближение гельдеровских функций ограниченной вариации рациональными операторами типа Валле Пуссена / А. С. Ляликов // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2002. – № 3. – С. 95–101.
9. *Русак, В. Н.* Об одном методе приближения рациональными функциями на вещественной оси / В. Н. Русак // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22. – № 3. – С. 375–380.
10. *Русак, В. Н.* Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки / В. Н. Русак // Матем. сб. – 1985. – Т. 128, № 4. – С. 492–515.

SUMMARY

Rational approximation of functions with bounded variation with fulfil satisfying Lipschitz-Holder's condition is being investigated researched. The order of evasion of integral rational Vallee Poussin's operators from functions of this class is found.

Поступила в редакцию 13.03.2015 г.