УДК 517.951

Н. В. Жуковская,
ассистент кафедры теории функций БГУ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭРМИТОВЫХ ФОРМ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРОВА ТИПА НА ОТРЕЗКЕ

Введение. Дробно-дифференциальные уравнения находят обширные приложения в различных областях математики, механики и физики. Изложение теории и библиографию можно найти, например, в [1]. Частным случаем таких уравнений являются дробно-дифференциальные уравнения эйлерова типа. Метод их решения обычно основывается на преобразовании Меллина, что для однородных уравнений, имеющих в качестве решения степенные функции, не является допустимым. В предлагаемой работе дается решение однородного дробно-дифференциального уравнения эйлерова типа на отрезке [0, 1] сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. С помощью метода эрмитовых форм получен признак разрешимости рассматриваемого уравнения в классе функций, представимых дробными интегралами.

***1. Однородное дробно-дифференциальное уравнение эйлерова типа на отрезке* [0,1].** *На отрезке* [0, 1] *рассмотрим однородное дифференциальное уравнение порядка* $\alpha + m$:

$$\begin{aligned}&A_m x^m (D_{0+}^{\alpha+m} y)(x) + \\ &+A_{m-1} x^{m-1} (D_{0+}^{\alpha+m-1} y)(x) + \\ &+ \ldots + \\ &+A_0 (D_{0+}^{\alpha} y)(x) = 0,\end{aligned} \qquad (1)$$

где $0<\alpha<1$, $m \in \mathbb{N}$, коэффициенты $A_0, A_1, \ldots,$ $A_m \in \mathbb{C}$, $(D_{0+}^{\alpha+m} y)(x)$ – дробная производная Римана, определяемая формулой [2]:

$$(D_{0+}^{\alpha+m} y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$
$$(0 \le x \le 1).$$

Решение $y(x)$ будем искать в классе $I^{\alpha}(L_1[0,1])$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $L_1[0,1]$. Обозначив $z = D_{0+}^{\alpha} y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_m x^m z^{(m)}(x) + A_{m-1} x^{m-1} z^{(m-1)}(x) + \ldots + A_0 z(x) = 0. \qquad (2)$$

Сделав замену $x = e^t$, $-\infty < t < 0$, приводим (2) к виду:

$$a_m \tilde{z}^{(m)}(t) + a_{m-1} \tilde{z}^{(m-1)}(t) + \ldots + a_0 \tilde{z}(t) = 0, \qquad (3)$$

где $\tilde{z}(t) = z(e^t)$ и коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ выражаются через $A_0, A_1, \ldots, A_m$ [3]. Уравнению (3) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$P_m(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0.$$

Пусть s – корень кратности k полинома $P_m(s)$. Тогда такому корню s многочлена $P_m(s)$ соответствуют k решений

$$z_1(x) = x^s,$$
$$z_2(x) = x^s \ln x, \ \ldots,$$
$$z_k(x) = x^s \ln^{k-1} x$$

уравнения (2). Для решения уравнения (1) получим дробно-дифференциальные уравнения

$$D_{0+}^{\alpha} y_1 = x^s, \ D_{0+}^{\alpha} y_2 = x^s \ln x, \ \ldots, \ D_{0+}^{\alpha} y_k = x^s \ln^{k-1} x.$$

Для $\left(D_{0+}^{\alpha} y_1\right)(x) = x^s$, используя [2], получим решение исходного уравнения (1) в виде:

$$y_1(x) = I_{0+}^{\alpha}(D_{0+}^{\alpha} y_1)(x) = I_{0+}^{\alpha}(t^s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^s dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Сделав замену $t = x\tau$, после преобразований получим:

$$y_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{s+1}\tau^s d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha} x^{1-\alpha}} = \frac{x^{\alpha+s}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^s (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau =$$
$$= \frac{x^{\alpha+s}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{B}(s+1,\alpha) = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} x^{\alpha+s}.$$

При условии $\operatorname{Re} s > -1$ функция $y_1(x) \in I^{\alpha}(L_1[0,1])$. Если $\operatorname{Re} s \le -1$, то решению $z_1(x) = x^s$ уравнения (2) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (1) в искомом классе.

Решениям $z_2(x), \ \ldots, \ z_k(x)$ соответствуют решения уравнения (1) вида:

$$y_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^s \ln t dt}{(x-t)^{1-\alpha}} =$$
$$= \frac{x^{\alpha+s}\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} (\psi(s+1) - \psi(\alpha+s+1) + \ln x),$$

$$y_3(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{t^s\ln^2 t\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$
$$=\frac{x^{\alpha+s}\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}((\psi(s+1)-\psi(\alpha+s+1)+\ln x)^2+$$
$$+\psi'(s+1)-\psi'(\alpha+s+1)),$$
…
$$y_k(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{t^s\ln^{k-1}t\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$
$$=x^{\alpha+s}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{ds^i}\left(\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)\ln^{k-i-1}x.$$

Здесь $\psi(x)$ – пси-функция Эйлера, $\operatorname{Re}s>-1$, функции $y_2(x),\ \dots,\ y_k(x)\in I^\alpha(L_1[0,1])$. Если $\operatorname{Re}s\le-1$, то решениям $z_k(x)=x^s\ln^{k-1}x$ уравнения (2) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (1) в искомом классе.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть характеристический многочлен $P_m(s)$ имеет κ_1 простых корней $s_{j1}(j=1,\dots,\kappa_1)$, κ_2 корней s_{j2} $(j=1,\dots,\kappa_2)$ кратности 2, … , κ_l корней s_{jl} $(j=1,\dots,\kappa_l)$ кратности l в полуплоскости $\operatorname{Re}s>-1$, причем $\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_l=\kappa,\ \kappa\le m$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x)=c_0x^{\alpha-1}+\sum_{j=1}^{\kappa}c_{j1}\frac{\Gamma(s_{j1}+1)}{\Gamma(\alpha+s_{j1}+1)}x^{\alpha+s_{j1}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{\kappa}c_{j2}\frac{\Gamma(s_{j2}+1)}{\Gamma(\alpha+s_{j2}+1)}x^{\alpha+s_{j2}}(1+\psi(s_{j2}+1)-$$
$$-\psi(\alpha+s_{j2}+1)+\ln x)+\dots+$$
$$+\sum_{j=1}^{\kappa_l}c_{jl}x^{\alpha+s_{jl}}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{ds_{jl}^i}\left(\frac{\Gamma(s_{jl}+1)}{\Gamma(\alpha+s_{jl}+1)}\right)\ln^{k-i-1}x,$$

где c_0, c_{lj} – произвольные постоянные.

Представляют интерес методы нахождения числа корней многочлена $P_m(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}s>-1$, не основанные на явном решении характеристического уравнения.

Обозначим $Q_m(t)=P_m(-it-1)$ и пусть $\overline{Q_m}(t)$ – многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены к коэффициентам $Q_m(t)$. Строим функцию:

$$h(Q_m;t,\tau)=$$
$$=-i\frac{Q_m(t)\overline{Q_m}(\tau)-Q_m(\tau)\overline{Q_m}(t)}{t-\tau}=$$
$$=\sum_{k,l=0}^{m-1}B_{kl}t^k\tau^l.$$

Этой функции ставим в соответствие эрмитову форму

$$H(Q_m;t_0,\dots,t_{m-1})=\sum_{k,l=0}^{m-1}B_{kl}t_k\overline{t_l}.$$

Из теоремы Эрмита [4] вытекает теорема 2.

Теорема 2. Пусть r и s – ранг и сигнатура эрмитовой формы $H(Q_m;t_0,\dots,t_{m-1})$. Тогда уравнение (1) имеет $(r+s)/2+1$ линейно независимое решение.

- Если эрмитова форма $H(Q_m;t_0,\dots,t_{m-1})$ определена положительно, то уравнение (1) имеет $m+1$ линейно независимое решение.
- Если эрмитова форма $H(Q_m;t_0,\dots,t_{m-1})$ определена отрицательно, то уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение $y(x)=c_0x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная постоянная.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

2. Уравнение с двумя дробными производными. *Рассмотрим частный случай уравнения (1) с двумя дробными производными:*

$$A_1x(D_{0+}^{\alpha+1}y)(x)+A_0(D_{0+}^{\alpha}y)(x)=0, \tag{4}$$

где $A_0, A_1\in\mathbb{C}$. Обозначив $z=D_{0+}^{\alpha}y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_1x\,z'(x)+A_0z(x)=0. \tag{5}$$

Сделав замену $x=e^t$, $-\infty<t<0$, приводим (5) к виду:

$$A_1z'(t)+A_0z(t)=0. \tag{6}$$

Уравнению (6) ставим в соответствие характеристический многочлен $P_1(s)=A_1s+A_0$. Соответствующая эрмитова форма имеет вид $H(Q_1;t_0)=Et_0\overline{t_0}$, где

$$E=2A_1\overline{A_1}-(A_1\overline{A_0}+A_0\overline{A_1})\in\mathbb{R}.$$

Имеет место теорема 3.

Теорема 3.

1. Пусть $E>0$. Тогда уравнение (4) имеет два линейно независимых решения.
2. Пусть $E<0$. Тогда уравнение (4) имеет одно линейно независимое решение $y(x)=c_0x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная постоянная.

В частном случае, когда $A_0, A_1\in\mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид

$$H(Q_1;t_0)=2A_1(A_1-A_0)t_0\overline{t_0}$$

и картину разрешимости уравнения (4) в предположении, что $A_1>0$, определяет следствие 1.

Следствие 1.

1. Пусть $A_1>0$, $A_1>A_0$. Тогда уравнение (4) имеет два линейно независимых решения.
2. Пусть $A_1>0$, $A_1<A_0$. Тогда уравнение (4) имеет одно линейно независимое решение $y(x)=c_0x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная постоянная.

3. Уравнение с тремя дробными производными. *Рассмотрим частный случай уравнения (1) с тремя дробными производными:*

$$A_2x^2(D_{0+}^{\alpha+2}y)(x)+A_1x(D_{0+}^{\alpha+1}y)(x)+ \\ +A_0(D_{0+}^{\alpha}y)(x)=0, \qquad (7)$$

где $A_0, A_1, A_2\in\mathbb{C}$. Обозначив $z=D_{0+}^{\alpha}y$, получим уравнение Эйлера:

$$A_2x^2z''(x)+A_1x\,z'(x)+A_0z(x)=0. \qquad (8)$$

Сделав замену $x=e^t$, $-\infty<t<0$, приводим (8) к виду:

$$A_2\,z''(t)+(A_1-A_2)z'(t)+A_0z(t)=0. \qquad (9)$$

Уравнению (9) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$P_2(s)=A_2s^2+(A_1-A_2)s+A_0.$$

Соответствующая эрмитова форма имеет вид:

$$H(Q_2;t_0,t_1)=At_1\overline{t_1}+Bt_1\overline{t_0}+Bt_0\overline{t_1}+Ct_0\overline{t_0},$$

где $A=A_2(3\overline{A_2}-\overline{A_1})+\overline{A_2}(3A_2-A_1)$,

$B=i(A_2(2\overline{A_2}+\overline{A_0}-\overline{A_1})-\overline{A_2}(2A_2+A_0-A_1))$,

$C=(3A_2-A_1)(2\overline{A_2}+\overline{A_0}-\overline{A_1})+$
$+(3\overline{A_2}-\overline{A_1})(2A_2+A_0-A_1)$.

Имеет место теорема 4.

Теорема 4.

1. Пусть r и s – ранг и сигнатура эрмитовой формы $H(Q_2;t_0,t_1)$. Тогда уравнение (7) имеет $(r+s)/2+1$ линейно независимое решение.
2. Пусть $A>0$, $AC-B^2>0$. Тогда уравнение (7) имеет три линейно независимых решения.
3. Пусть $A<0$, $AC-B^2>0$. Тогда уравнение (7) имеет одно линейно независимое решение $y(x)=c_0x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная постоянная.
4. Пусть $AC-B^2<0$. Тогда уравнение (7) имеет два линейно независимых решения.
5. Пусть $AC-B^2=0$. Тогда уравнение (7) при $s=1$ имеет два линейно независимых решения, а при $s=-1$ – одно линейно независимое решение $y(x)=c_0x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная постоянная.

В частном случае, когда $A_0, A_1, A_2\in\mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид

$$H(Q_2;t_0,t_1)=\gamma t_1\overline{t_1}+\beta t_0\overline{t_0},$$

где

$$\gamma=2A_2(3A_2-A_1),$$
$$\beta=2(3A_2-A_1)(2A_2+A_0-A_1)$$

и картину разрешимости уравнения (7) в предположении, что $A_2>0$, определяет следствие 2.

Следствие 2.

1. Пусть $\begin{cases} A_2>0, \\ 3A_2>A_1, \\ 2A_2+A_0>A_1. \end{cases}$
Тогда уравнение (7) имеет три линейно независимых решения.
2. Пусть $\begin{cases} A_2>0, \\ 3A_2>A_1, \\ 2A_2+A_0<A_1 \end{cases}$ или $\begin{cases} A_2>0, \\ 3A_2<A_1, \\ 2A_2+A_0<A_1. \end{cases}$
Тогда уравнение (7) имеет два линейно независимых решения.
3. Пусть $\begin{cases} A_2>0, \\ 3A_2<A_1, \\ 2A_2+A_0>A_1. \end{cases}$
Тогда уравнение (7) имеет одно линейно независимое решение $y(x)=c_0x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная постоянная.

Выводы. В работе дано решение однородного дробно-дифференциального уравнения типа Эйлера на отрезке [0, 1] в классе $I^{\alpha}(L_1[0,1])$ функций, представимых дробными интегралами порядка α с плотностью из $L_1[0,1]$. Методом эрмитовых форм исследована разрешимость рассматриваемого уравнения для случая двух, трех и конечного числа дробных производных Римана–Лиувилля в классе $I^{\alpha}(L_1[0,1])$. Рассмотрены частные случаи.

Литература

1. *Podlubny, I.* Fractional differential equations / I. Podlubny. – San-Diego: Academic Press, 1999.
2. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск, 1987.
3. *Матвеев, Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Минск : Высшая школа, 1963.

4. *Крейн, М. Г.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений / М. Г. Крейн, М. А. Наймарк. – Харьков : ОНТИ, 1936.

SUMMARY

Homogeneous differential equation of order $\alpha + m$ *with Riemann – Liouville fractional derivatives on the segment* [0, 1] *is considered. General solution of the considered equation is established in the general case, when there are multiple roots of the characteristic polynomial. Using Hermitean form method sufficient conditions of the linear independence of solutions are established. Special cases are considered.*

Поступила в редакцию 08.04.2015 г.