УДК 517.95

И. Л. Васильев,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теории функций БГУ;
Н. В. Жуковская,
ассистент кафедры теории функций БГУ

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ЭЙЛЕРА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРОИЗВОДНЫХ

Введение. Многие задачи математической физики и механики сводятся к дробно-дифференциальным уравнениям, в частности к уравнениям эйлерова типа. В случае, когда порядки соседних производных отличаются на целое число, такие уравнения изучались ранее, например в [1–3]. Их решение основывалось либо на преобразовании Меллина, либо на сведении к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Если порядки производных произвольные, указанные выше методы применить не удается. В предлагаемой ниже работе вводится специальное банахово пространство функций, в котором изучается действие оператора взвешенного дробного интегрирования. С помощью полученных результатов обобщенное дробно-дифференциальное уравнение эйлерова типа с конечным числом производных произвольного порядка удается свести к системе алгебраических уравнений и дать его решение в замкнутой форме.

1. ***Оператор взвешенного дробного интегрирования в пространстве A_p.*** Пусть A_p – нормированное векторное пространство функций, разлагающихся в степенной ряд вида $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k x^k$, $0<x<1$, $\{f_k\}\in l_p$.

Пространство A_p является банаховым с нормой $\|f\|_{A_p}=\left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|f_k|^p\right\}^{1/p}=\|\{f_k\}\|_{l_p}$.

Изучим действие на функции из A_p операторов дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$, определяемых соответственно формулами [4]

$$\left(I_+^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

и

$$\left(D_+^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Пусть $\varphi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k x^k$. Обозначим

$$f(x)=\left(I_+^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k t^k dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{t^k dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Пусть $x\in(0,1)$, $\varepsilon>0$. В силу свойств степенных рядов $\forall a\in[0,1)$ $\exists n(\varepsilon,a)$, что $\forall n\geq n(\varepsilon,a)$, $\forall x\in[0,a]$: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}c_k x^k\right|\leq\varepsilon$. Тогда

$$|f(x)-f_n(x)|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}c_k t^k\right)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right|\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\left[t=x\tau\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}}=\frac{\varepsilon x^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\leq\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma(\alpha)}a^{\alpha}.$$

Таким образом, f_n сходится к f равномерно на любом отрезке $[0;\ a]$, $0<a<1$. Тогда $\forall x\in(0,1]$ имеем

$$\left(I_+^{\alpha}\varphi\right)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{t^k dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=[t=x\tau]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha)}x^{k+\alpha}\int_0^1\frac{\tau^k d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}}= \tag{1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha)}x^{k+\alpha}\mathrm{B}(k+1,\alpha)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}x^{k+\alpha}.$$

Через $I_+^{\alpha}\left[A_p\right]$ обозначим пространство функций, представимых в виде дробного интеграла порядка α с плотностью из A_p. В силу (1) и формулы [5] $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}=k^{-\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$ при $k\to\infty$ делаем вывод, что

$$I_+^{\alpha}\left[A_p\right]=\left\{f(x)=x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^k\,\middle|\,\{d_k k^{\alpha}\}\in l_p\right\}.$$

Это пространство является банаховым с нормой $\|f\|_{I_+^\alpha[A_p]} = \left\|\{d_k k^\alpha\}\right\|_{l_p}$. Используя те же рассуждения, что и выше, установим, что $(D_+^\alpha\varphi)(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(k+1-\alpha)\dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+2-\alpha)}x^{k-\alpha}$.

Как известно [4], операторы I_+^α, D_+^α, вообще говоря, не обращают друг друга. Для функций $\varphi\in A_p$ имеем $D_+^\alpha[I_+^\alpha](\varphi)\equiv\varphi$, $I_+^\alpha[D_+^\alpha](\varphi)\equiv\varphi$. Кроме того, верны операторные равенства $I_+^\alpha[I_+^\beta]\equiv I_+^{\alpha+\beta}$, $\forall\alpha,\beta\in(0,1)$, $D_+^\alpha[D_+^\beta]\equiv D_+^{\alpha+\beta}$, $\forall\alpha,\beta\in(0,1)$, что $(\alpha+\beta)\in(0,1)$, $D_+^\beta[I_+^\alpha]\equiv I_+^{\alpha-\beta}$, $0<\beta<\alpha<1$.

Рассмотрим оператор взвешенного дробного интегрирования

$$K^\gamma u = \frac{1}{x^\gamma}I_+^\gamma u = \frac{1}{x^\gamma}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. x^m – собственные функции оператора K^γ в A_p, соответствующие собственным значениям $\dfrac{m!}{\Gamma(m+1+\gamma)}$.

Доказательство.

$$I_+^\gamma(x^m) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^x \frac{t^m dt}{(x-t)^{1-\gamma}} = \left[t=\tau x\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}x^{m+\gamma}\int_0^1 \tau^m(1-\tau)^{\gamma-1}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\mathrm{B}(m+1,\gamma)x^{m+\gamma} = \frac{m!}{\Gamma(m+1+\gamma)}x^{m+\gamma};$$

$$K^\gamma\left(x^m\right) = \frac{1}{x^\gamma}\frac{m!}{\Gamma(m+1+\gamma)}x^{m+\gamma} =$$

$$= \frac{m!}{\Gamma(m+1+\gamma)}x^m = d_m^\gamma x^m,$$

где $d_m^\gamma = \dfrac{m!}{\Gamma(m+1+\gamma)}$.

Пусть $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in A_p$. Тогда

$$K^\gamma u = K^\gamma\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k K^\gamma\left(x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k^\gamma x^k.$$

Возможность почленного интегрирования обоснована выше.

Имеет место теорема 2.

Теорема 2. Оператор K^γ ограничен в A_p, $1\le p<+\infty$, при этом $\left\|K^\gamma\right\| = \dfrac{1}{\Gamma(1+\gamma)}$.

Доказательство. $\left\|K^\gamma u\right\|_{A_p} = \left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|c_k d_k^\gamma\right|^p\right\}^{1/p}$, $\|u\|_{A_p} = \left\{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|c_k\right|^p\right\}^{1/p}$. Можно показать, что последовательность $\{d_m^\gamma\}$ монотонно убывает, поэтому $\left|d_m^\gamma\right|_{\max} = \left|d_0^\gamma\right| = \dfrac{1}{\Gamma(1+\gamma)}$. Тогда

$$\left\|K^\gamma u\right\|_{A_p} \le \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|c_k\right|^p\right\}^{1/p} = \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}\|u\|_{A_p}.$$

Итак, оператор K^γ ограничен в A_p. При $u = 1$ $K^\gamma(1) = \dfrac{1}{\Gamma(1+\gamma)}$, следовательно, $\left\|K^\gamma\right\| = \dfrac{1}{\Gamma(1+\gamma)}$.

Следствие 1. Если $\gamma>1$, то $\Gamma(1+\gamma)>1$, следовательно K^γ – оператор сжатия.

2. ***Обобщенное уравнение с конечным числом производных произвольного порядка.*** Рассмотрим линейное неоднородное уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных:

$$\begin{aligned} &a_n x^{m_n}(D_+^{m_n}y)(x) + \\ &+a_{n-1}x^{m_{n-1}}(D_+^{m_{n-1}}y)(x) + \\ &+ \ldots + \\ &+a_1 x^{m_1}(D_+^{m_1}y)(x) = f(x), \\ &0<x<1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $m_n > m_{n-1} > \ldots > m_1$. Здесь $y\in I_+^{m_n}\{A_p\}$, f такое, что $x^{-m_n}f(x)\in A_p$.

Введем следующие обозначения:

$$g = \frac{f}{a_n x^{m_n}},\quad \frac{a_{n-1}}{a_n} = A_1,\quad \ldots,\quad \frac{a_1}{a_n} = A_{n-1};$$

$$m_n - m_{n-1} = \gamma_1,\ \ldots,\ m_n - m_1 = \gamma_{n-1}.$$

Разделим обе части уравнения на $a_n x^{m_n}$ и обозначим $u = D_+^{m_n}y$. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$u + A_1K^{\gamma_1}u + A_2K^{\gamma_2}u + \ldots + A_{n-1}K^{\gamma_{n-1}}u = g, \tag{3}$$

где введены обозначения

$$K^{\gamma_1}u = \frac{1}{x^{\gamma_1}}I_+^{\gamma_1}u,\ \ldots,\ K^{\gamma_{n-1}}u = \frac{1}{x^{\gamma_{n-1}}}I_+^{\gamma_{n-1}}u.$$

Будем искать решение в пространстве A_p, $g\in A_p$. Подставляя разложения

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,\quad g = \sum_{k=0}^{\infty} t_k x^k,$$

где c_k неизвестны, t_k заданы, в уравнение (3), получим бесконечную систему уравнений:

$$c_k\left(1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \ldots + A_{n-1}d_k^{\gamma_{n-1}}\right) = t_k,\quad k = \overline{0,\infty}, \tag{4}$$

$d_k^{\gamma_i} = \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\gamma_i)} = k^{-\gamma_i}\left[1+O\left(\dfrac{1}{k}\right)\right]$ при $k\to\infty$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty} d_k^{\gamma_i} = 0$ и в системе (4) лишь конечное число коэффициентов $\left(1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \ldots + A_{n-1}d_k^{\gamma_{n-1}}\right)$ может обратиться в нуль. Кроме того, $\{c_k\}\in l_p$. Пусть c_k определены из системы (4). Тогда решение уравнения (2) найдем в виде

$$y = I_+^{m_n}(u) = \frac{1}{\Gamma(m_n)} \int_0^x \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k}{(x-t)^{1-m_n}} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^x \frac{t^k dt}{(x-t)^{1-m_n}} = \left[t = \tau x\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m_n} \int_0^1 \tau^k (1-\tau)^{m_n-1} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+m_n} \mathrm{B}(k+1, m_n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k!}{\Gamma(k+m_n+1)} x^{k+m_n} = \frac{x^{m_n}}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k!}{(m_n)_{k+1}} x^k.$$

Суммируя вышеизложенное, заключаем, что верна теорема 3.

Теорема 3.

1) Пусть $1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \ldots + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}} \neq 0, \quad \forall k = \overline{0, \infty}$. Тогда уравнение (2) имеет в пространстве A_p единственное решение

$$y = \frac{x^{m_n}}{\Gamma(m_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k!}{(m_n)_{k+1}} x^k, \tag{5}$$

где

$$c_k = \frac{t_k}{1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \ldots + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}}}. \tag{6}$$

2) Пусть $\exists k_1, \ldots, k_N$:

$$1 + A_1 d_{k_i}^{\gamma_1} + \ldots + A_{n-1} d_{k_i}^{\gamma_{n-1}} = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

а $\forall k \neq k_i$, $i = \overline{1, N}$: $1 + A_1 d_k^{\gamma_1} + \ldots + A_{n-1} d_k^{\gamma_{n-1}} \neq 0$. Тогда если $t_{k_i} = 0, i = \overline{1, N}$, то уравнение (2) имеет в пространстве A_p N линейно независимых решений (5), где c_k, $k \neq k_i$, $i = \overline{1, N}$ находятся из (6), c_{k_i}, $i = \overline{1, N}$ – произвольные постоянные. Если хотя бы одно $t_{k_i} \neq 0$, $i = \overline{1, N}$, то уравнение (2) не имеет решений в A_p.

Заключение. В банаховом пространстве A_p рассмотрено обобщенное дробно-дифференциальное уравнение эйлерова типа с конечным числом производных произвольного порядка. Это уравнение сведено к равносильной системе линейных алгебраических уравнений. Получены условия разрешимости и явный вид решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Podlubny, I.* Fractional differential equations / I. Podlubny. – San-Diego: Academic Press, 1999.
2. *Килбас, А. А.* Решение в замкнутой форме линейных неоднородных уравнений типа Эйлера с дробными производными / А. А. Килбас, Н. В. Жуковская // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 30–36.
3. *Жуковская, Н. В.* Решение однородных дифференциальных уравнений типа Эйлера дробного порядка / Н. В. Жуковская, А. А. Килбас // Дифференц. уравн. – 2011. – Т. 47. № 12. – С. 1693–1704.
4. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск, 1987.
5. *Маричев, О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций / О. И. Маричев, Ф. Д. Гахов. – Минск : Наука и техника, 1978.

SUMMARY

Generalized nonhomogeneous fractional differential equation with finite number derivatives of arbitrary order on the interval (0, 1) *is examined. Solvability conditions and explicit solution of the considered equation are obtained using the properties of weighted fractional integration operator.*

Поступила в редакцию 15.04.2015 г.