УДК 517.518.1

В. Н. Русак,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
и математической физики БГУ;
Н. В. Гриб,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и геометрии БГПУ

СИНУС-ДРОБИ ЧЕБЫШЕВА–МАРКОВА В ПРИБЛИЖЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ

Алгебраические дроби, наименее уклоняющиеся от нуля, нашли применение в рациональной аппроксимации, в частности, при нахождении экстремальных оценок для производных рациональных функций, при построении рациональных операторов и нахождении порядковых оценок их уклонений в различных пространствах. В данной статье синус-дроби Чебышева–Маркова применяются при построении и исследовании квадратурных формул типа Гаусса, точных на рациональных функциях с фиксированными знаменателями.

Пусть $q_{2n-1}(x)=\prod_{j=1}^{2n-1}\left(1+a_jx\right)$, где числа a_j либо действительные и $\left|a_j\right|<1$, либо попарно комплексно-сопряженные. Определим функции

$$\lambda_{n+1}(x)=3+\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_kx},$$

$$\varphi'_{2n+2}(x)=\frac{-\lambda_{n+1}(x)}{2\sqrt{1-x^2}},\ x\in\left[-1,1\right], \tag{1}$$

$$\varphi_{2n+2}(-1)=\left(2n+2\right)\pi,$$

$$N_n(x)=\frac{\sin\varphi_{2n+2}(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где действительная часть всех радикалов берется положительной и функция $N_n(x)$ есть известная [1] синус-дробь Чебышева–Маркова, имеющая на интервале $\left(-1,1\right)$ n различных простых нулей $\left\{x_j\right\}$, причем

$$-1<x_1<x_2<\ldots<x_n<1,$$
$$\varphi_{2n+2}(x_j)=(2n+2-j)\pi. \tag{2}$$

Отметим также, что

$$N_n(x)=\frac{\nu_n(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}, \tag{3}$$

где $\nu_n(x)$ – алгебраический полином порядка n.

Лемма 1. Синус-дроби Чебышева–Маркова удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{-1}^{1}N_n(x)\frac{x^k\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}dx=0,\quad k=\overline{0,n-1} \tag{4}$$

Доказательство. С помощью замены $x=\left(1-y^2\right)/\left(1+y^2\right)$, отображающей $(-\infty,\infty)$ в дважды пробегаемый интервал $\left(-1,1\right)$, алгебраические дроби $\sin\varphi_{2n+2}(x)$ преобразуются в синус-дроби Бернштейна так, что

$$\sin\varphi_{2n+2}(x)=\sin\Phi_{2n+2}(y)=\frac{\pi_{2n+1}(y)}{\sqrt{h_{4n+4}(y)}},$$

$$h_{4n+4}(y)=\prod_{j=1}^{2n+2}\left(y^2+\frac{1+a_j}{1-a_j}\right), \tag{5}$$

$$-\infty<y<\infty,$$

$$a_{2n}=a_{2n+1}=a_{2n+2}=0,$$

где $\pi_{2n+1}(y)$ – нечетный алгебраический полином степени не выше $2n+1$. Полином $h_{4n+4}(y)$ является положительным на действительной оси, и его корни попарно комплексно-сопряженные, а также расположены симметрично и относительно мнимой оси. Обозначим через $\left\{z_l\right\},\ l=\overline{1,2n+2}$ те корни полинома $h_{4n+4}(y)$, для которых $\operatorname{Im}z_l>0$. Тогда выполнены равенства [1, с.15]

$$h_{4n+4}(y)=\prod_{l=1}^{2n+2}\left(z_l-y\right)\left(\overline{z_l}-y\right),$$

$$\sin\Phi_{2n+2}(y)=\frac{1}{2i}\left(\prod_{l=1}^{2n+2}\frac{z_l-y}{\left|z_l-y\right|}-\prod_{l=1}^{2n+2}\frac{\overline{z_l}-y}{\left|\overline{z_l}-y\right|}\right). \tag{6}$$

Отметим дополнительно, что если $x=\left(1-y^2\right)/\left(1+y^2\right)$, то

$$q_{2n-1}(x)=\prod_{j=1}^{2n-1}\left(1-a_j\right)\frac{h_{4n+4}(y)}{\left(1+y^2\right)^{2n+2}}, \tag{7}$$

и нули (2) синус-дроби $N_n(x)$ связаны с положительными нулями $\{y_l\}$ синус-дроби $\sin\Phi_{2n+2}(y)$ равенствами

$$x_l=\frac{1-y_l^2}{1+y_l^2},\quad y_l>0,\quad l=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Выполняя замену переменной интегрирования в левой части (4), с учетом (5–7) получим

$$\int_{-1}^{1}N_n(x)\frac{x^k\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{\sin\varphi_{2n+2}(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}x^k dx=$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\Phi_{2n+2}(y)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}\frac{\left(1-y^2\right)^k}{\left(1+y^2\right)^{k+2}}ydy=$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\Phi_{2n+2}(y)}{\sqrt{h_{4n+4}(y)}}\left(1-y^2\right)^k\left(1+y^2\right)^{n-k-1}ydy=$$

$$=\frac{1}{i}\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(1+y^2\right)^{n-k-1}\left(1-y^2\right)^k\left(\prod_{l=1}^{2n+2}(z_l-y)-\prod_{l=1}^{2n+2}\left(\overline{z_l}-y\right)\right)}{\prod_{l=1}^{2n+2}(z_l-y)\left(\overline{z_l}-y\right)}ydy=0,$$

поскольку подынтегральная функция представлена в виде суммы двух аналитических слагаемых, имеющих на бесконечности нули не ниже второго порядка и не имеющих особых точек в верхней или нижней полуплоскости.

В пространстве $C[-1,1]$ непрерывных функций определим интерполяционный оператор L_n по нулям синус-дроби (3), полагая

$$L_n(x,f)=\sum_{m=1}^{n}f(x_m)l_m(x),$$
$$l_m(x)=\frac{N_n(x)}{(x-x_m)N_n'(x_m)}. \tag{9}$$

Этот оператор отображает $C[-1,1]$ в пространство алгебраических дробей

$$\frac{p_{n-1}(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}, \tag{10}$$

причем каждая функция вида (10) отображается в себя. В частности, если $p_{n-1}(x)\equiv 1$, то выполняется равенство

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_m)}}\frac{N_n(x)}{(x-x_m)N_n'(x_m)}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}. \tag{11}$$

Лемма 2. При всех $k=\overline{1,n}$ справедливы равенства

$$\int_{-1}^{1}\frac{N_n^2(x)\sqrt{1-x^2}}{(x-x_k)^2\left(N_n'(x_k)\right)^2}dx=$$
$$=\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}\int_{-1}^{1}\frac{N_n(x)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)N_n'(x_k)}dx. \tag{12}$$

Доказательство. Прежде всего проверим, что фундаментальные дроби $l_m(x)$ взаимно ортогональны со вторым чебышевским весом. Действительно, учитывая (1), (3), (9) и (4), найдем

$$\int_{-1}^{1}l_m(x)l_j(x)\sqrt{1-x^2}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{N_n(x)}{N_n'(x_m)N_n'(x_j)}\frac{N_n(x)}{(x-x_m)(x-x_j)}\sqrt{1-x^2}dx= \tag{13}$$

$$=\int_{-1}^{1}N_n(x)\frac{p_{n-2}(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}\sqrt{1-x^2}dx=0,\quad m\neq j,$$

и, таким образом, ортогональность $l_m(x)$ и $l_j(x)$ установлена. Умножим теперь равенство (11) на $l_k(x)\sqrt{1-x^2}$ и проинтегрируем с учетом (13), тогда

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}\frac{N_n(x)\sqrt{1-x^2}}{(x-x_k)N_n'(x_k)}dx=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_m)}}\int_{-1}^{1}\frac{N_n(x)N_n(x)\sqrt{1-x^2}}{(x-x_m)N_n'(x_m)(x-x_k)N_n'(x_k)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}\int_{-1}^{1}\frac{N_n^2(x)\sqrt{1-x^2}}{(x-x_k)^2\left(N_n'(x_k)\right)^2}dx,$$

что равносильно соотношению (12).

Замечание 1. В полиномиальном случае, когда $a_j=0$, $j=\overline{1,2n-1}$, соответственно $q_{2n-1}(x)\equiv 1$, равенство (12) из леммы 2 принимает вид

$$\int_{-1}^{1}l_k^2(x)\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-1}^{1}l_k(x)\sqrt{1-x^2}dx.$$

Лемма 3. При $k=\overline{1,n}$ выполняются равенства

$$\int_{-1}^{1}\frac{N_n^2(x)\sqrt{1-x^2}}{(x-x_k)^2\left(N_n'(x_k)\right)^2}dx=\frac{2\pi\left(1-x_k^2\right)}{\lambda_{n+1}(x_k)}. \tag{14}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, воспользуемся заменой $x=\left(1-y^2\right)/\left(1+y^2\right)$, $x_k=\left(1-y_k^2\right)/\left(1+y_k^2\right)$, $y_k>0$, и с учетом (5–8) получим

$$I_k=\int_{-1}^{1}\frac{N_n(x)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)}dx=\int_{-1}^{1}\frac{\sin\varphi_{2n+2}(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\Phi_{2n+2}(y)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}\frac{(1+y^2)(1+y_k^2)2y}{(y_k^2-y^2)(1+y^2)^2}dy=$$
$$=(1+y_k^2)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\sin\Phi_{2n+2}(y)}{\sqrt{h_{4n+4}(y)}}\frac{(1+y^2)^n y}{(y_k^2-y^2)}dy=$$
$$=\frac{1+y_k^2}{2i}\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{-\frac{1}{2}}\times \tag{15}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\prod_{l=1}^{2n+2}(z_l-y)-\prod_{l=1}^{2n+2}(\overline{z_l}-y)}{\prod_{l=1}^{2n+2}(z_l-y)(\overline{z_l}-y)}\frac{(1+y^2)^n}{y_k^2-y^2}ydy=0.$$

Будем считать $\operatorname{Im}z>0$ и найдем через вычеты интеграл

$$I_k(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{2n+2}\frac{1}{\overline{z_l}-y}-\prod_{l=1}^{2n+2}\frac{1}{z_l-y}\right)\frac{(1+y^2)^n}{y^2-z^2}ydy=$$
$$=\pi i(1+z^2)^n\left(\frac{\prod_{l=1}^{2n+2}(z_l-z)}{\prod_{l=1}^{2n+2}(\overline{z_l}-z)(z_l-z)}+\frac{\prod_{l=1}^{2n+2}(\overline{z_l}+z)}{\prod_{l=1}^{2n+2}(\overline{z_l}+z)(z_l+z)}\right).$$

Теперь воспользуемся равенством $I_k(y_k)=\lim\limits_{z\to y_k}I_k(z)$, подставим $I_k(y_k)$ в (15) и найдем, учитывая (7) и симметричность $\{z_l\}$ относительно мнимой оси,

$$I_k=-\frac{1+y_k^2}{2i}\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{-\frac{1}{2}}\pi i(1+y_k^2)^n\times$$
$$\times\left(\frac{\prod_{l=1}^{2n+2}(z_l-y_k)}{\prod_{l=1}^{2n+2}(\overline{z_l}-y_k)(z_l-y_k)}+\frac{\prod_{l=1}^{2n+2}(\overline{z_l}+y_k)}{\prod_{l=1}^{2n+2}(\overline{z_l}+y_k)(z_l+y_k)}\right)=$$
$$=-\frac{\pi}{2}\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{-\frac{1}{2}}(1+y_k^2)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{h_{4n+4}(y_k)}}\times \tag{16}$$
$$\times\left(\prod_{l=1}^{2n+2}\frac{z_l-y_k}{|z_l-y_k|}-\prod_{l=1}^{2n+2}\frac{\overline{z_l}+y_k}{|\overline{z_l}+y_k|}\right)=$$
$$=-\frac{\pi}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}\prod_{l=1}^{2n+2}\frac{z_l-y_k}{|z_l-y_k|}.$$

Обозначим $\omega_{n,k}=\prod_{l=1}^{2n+2}(z_l-y_k)/|z_l-y_k|$, тогда в силу (6) $\omega_{n,k}-\overline{\omega_{n,k}}=0$. С другой стороны, в нулях $\{y_l\}$, $l=\overline{1,n}$, синус-дроби $\sin\Phi_{2n+2}(y)$ выполняются равенства

$$\omega_{n,k}+\overline{\omega_{n,k}}=-2\operatorname{sign}N_n'(x_k),$$

поэтому $\omega_{n,k}=-\operatorname{sign}N_n'(x_k)$. Соответственно равенство (16) будет иметь вид

$$I_k=-\frac{\pi}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}\left(-\operatorname{sign}N_n'(x_k)\right)=\frac{\pi\operatorname{sign}N_n'(x_k)}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}. \tag{17}$$

Из соотношений (12), (15), (17) и (1–2) получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{N_n^2(x)\sqrt{1-x^2}}{(x-x_k)^2\left(N_n'(x_k)\right)^2}dx=\frac{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}{N_n'(x_k)}\frac{\pi\operatorname{sign}N_n'(x_k)}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}=\frac{\pi}{|N_n'(x_k)|}=\frac{2\pi(1-x_k^2)}{\lambda_{n+1}(x_k)},$$

что совпадает с равенством (14), и лемма полностью доказана.

Пусть, как и в (1), $q_{2n-1}(x)$ – фиксированный полином, положительный на отрезке $[-1,1]$, и

$$r_{2n-1}(x)=\frac{p_{2n-1}(x)}{q_{2n-1}(x)} \tag{18}$$

– правильная рациональная функция, $N_n(x)$ – синус-дробь Чебышева–Маркова. Введем рациональные функции

$$A_k(x)=\frac{N_n^2(x)}{\left(N_n'(x_k)(x-x_k)\right)^2}\left(1-\frac{N_n''(x_k)(x-x_k)}{N_n'(x_k)}\right),$$
$$B_k(x)=\frac{N_n^2(x)}{\left(N_n'(x_k)\right)^2(x-x_k)}. \tag{19}$$

Лемма 4. Рациональная функция $r_{2n-1}(x)$ вида (18) определяется по своим значениям и значениям производной в точках $\{x_k\}_{k=1}^n$ единственным образом и имеет представление

$$r_{2n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}r_{2n-1}(x_k)A_k(x)+\sum_{k=1}^{n}r_{2n-1}'(x_k)B_k(x). \tag{20}$$

Доказательство. Действительно, из (19) при всех k и i имеем $B_k(x_i)=0$. Если $k\neq i$, то очевидными являются равенства

$$A_k(x_i)=0,\quad A_k'(x_i)=0,\quad B_k'(x_i)=0.$$

В свою очередь, соотношения $A_k(x_k)=1$, $A_k'(x_k)=0$, $B_k'(x_k)=1$ проверяются с помощью правила Лопиталя. Если бы существовала другая рациональная функция вида (18) $r_{2n-1}^*(x)$ такая, что

$$r^*_{2n-1}(x) = r_{2n-1}(x_k),\ \left(r^*_{2n-1}(x)\right)' = r'_{2n-1}(x_k),\ k = \overline{1,n},$$

то их разность $r_{2n-1}(x) - r^*_{2n-1}(x)$ была бы рациональной функцией, имеющей n двойных нулей, что невозможно.

Отметим важный частный случай формулы (20), когда $r_{2n-1}(x) \equiv 1$, она принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x) = 1. \qquad (21)$$

Будем рассматривать квадратурные формулы со вторым чебышевским весом

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \rho_n(f) \quad (22)$$

в пространстве $C[-1,1]$. Через $R_{2n-1}(f)$ обозначим наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ рациональными функциями вида (18).

Теорема. Если $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ – нули синус-дроби $N_n(x)$ и коэффициенты $A_k = 2\pi(1-x_k^2)/\lambda_{n+1}(x_k)$, то квадратурная формула (22) точна на рациональных функциях (18), и для любой функции $f(x) \in C[-1,1]$ выполняется неравенство

$$|\rho_n(f)| \le \pi R_{2n-1}(f). \qquad (1)$$

Доказательство. Пользуясь леммами 4 и 1, а также соотношениями (19) и леммой 3, найдем равенство

$$\int_{-1}^{1} r_{2n-1}(x)\sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(r_{2n-1}(x_k)\int_{-1}^{1} A_k(x)\sqrt{1-x^2}dx + r'_{2n-1}(x_k)\int_{-1}^{1} B_k(x)\sqrt{1-x^2}dx \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_{2n-1}(x_k)\int_{-1}^{1} \frac{N_n^2(x)}{\left(N'_n(x_k)(x-x_k)\right)^2}\left(1 - \frac{N''_n(x_k)}{N'_n(x_k)}(x-x_k)\right)\sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_{2n-1}(x_k)\int_{-1}^{1} \frac{N_n^2(x)\sqrt{1-x^2}}{\left(N'_n(x_k)(x-x_k)\right)^2}dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi(1-x_k^2)}{\lambda_{n+1}(x_k)} r_{2n-1}(x_k),$$

которое означает, что остаток $\rho_n(r_{2n-1}) = 0$, то есть квадратурная формула (22) с коэффициентами $A_k = 2\pi(1-x_k^2)/\lambda_{n+1}(x_k)$ точна на рациональных функциях (18). В частности, отметим равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi(1-x_k^2)}{\lambda_{n+1}(x_k)} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2},$$

вытекающее также и из соотношения (21).

Пусть $f(x) \in C[-1,1]$ и $r^*_{2n-1}(x)$ – рациональная функция наилучшего приближения. В силу неотрицательности коэффициентов

$$A_k = 2\pi(1-x_k^2)/\lambda_{n+1}(x_k)$$

и точности квадратурной формулы для $r^*_{2n-1}(x)$ будем иметь

$$|\rho_n(f)| = \left| \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi(1-x_k^2)}{\lambda_{n+1}(x_k)} f(x_k) \right| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} \left(f(x) - r^*_{2n-1}(x)\right)\sqrt{1-x^2}dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi(1-x_k^2)}{\lambda_{n+1}(x_k)}\left(r^*_{2n-1}(x) - f(x_k)\right) \right| \le$$

$$\le R_{2n-1}(f)\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi(1-x_k^2)}{\lambda_{n+1}(x_k)} \right) =$$

$$= 2R_{2n-1}(f)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \pi R_{2n-1}(f),$$

и доказательство теоремы завершено.

Замечание 2. Квадратурные формулы для отрезка $[-1,1]$ с весовой функцией $\sqrt{1-x^2}$, точные на рациональных функциях

$$\frac{p_{2n-1}(x)}{\prod_{j=1}^{n-1}(1+a_j x)^2}$$

с полюсами второй кратности, содержатся в теореме. Заметим, однако, что они были получены ранее в работе [2] на основе лагранжевой интерполяции.

Литература

1. *Русак, В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. – Минск : Изд-во БГУ, 1979. – 176 с.
2. *Ровба, Е. А.* Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации / Е. А. Ровба. – Гродно : Изд-во ГрГУ, 2001. – 136 с.

Summary

Gauss-type quadrature formulas for rational functions with simple poles have been investigated constructed.

Поступила в редакцию 13.03.2015 г.