УДК 517.968.23

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
дэкан фізіка-матэматычнага факультэта БДПУ;
К. С. Дабрынская,
студэнт IV курса фізіка-матэматычнага факультэта БДПУ

ДАСЛЕДАВАННЕ АБАГУЛЬНЕНАЙ СІСТЭМЫ КАШЫ–РЫМАНА З ДЗВЮМА НЕЗАЛЕЖНЫМІ КАМПЛЕКСНЫМІ ЗМЕННЫМІ

Уводзіны. Прадметам даследавання з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial g}-\frac{\partial v}{\partial h}&=a(z,z_1)u-b(z,z_1)v+\varphi,\\ \frac{\partial u}{\partial h}+\frac{\partial v}{\partial g}&=b(z,z_1)u+a(z,z_1)v+\psi,\end{aligned}\qquad(1)$$

дзе $z=x+iy$, $z_1=x_1+iy_1$; u, v, a, b, φ, ψ – камплексныя функцыі, вызначаныя ў выпуклым абсягу D рэчаіснай эўклідавай прасторы зменных x, y, x_1, y_1; дыферэнцыяльныя аператары (фармальныя вытворныя) $\frac{\partial u}{\partial g}$, $\frac{\partial u}{\partial h}$ вызначаюцца наступным чынам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial g}&=\frac{1}{\bar{g}_x g_y-g_x\bar{g}_y}\left(\bar{g}_x\frac{\partial}{\partial y}-\bar{g}_y\frac{\partial}{\partial x}\right)u,\\ \frac{\partial u}{\partial h}&=\frac{1}{\bar{h}_{x_1}h_{y_1}-h_{x_1}\bar{h}_{y_1}}\left(\bar{h}_{x_1}\frac{\partial}{\partial y_1}-\bar{h}_{y_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u;\end{aligned}\qquad(2)$$

камплексныя функцыі $g=g(x,y)$, $h=h(x_1,y_1)$ і спалучаныя ім функцыі $\bar{g}=\bar{g}(x,y)$, $\bar{h}=\bar{h}(x_1,y_1)$ – база фармальных вытворных (2); $\bar{g}_x g_y-g_x\bar{g}_y\neq 0$, $\bar{h}_{x_1}h_{y_1}-h_{x_1}\bar{h}_{y_1}\neq 0$ у абсягу D; $g_x\equiv\frac{\partial g}{\partial x}$ і г. д.

У выпадку, калі $z=x$, $z_1=y$, а u і v – рэчаісныя функцыі ад іх, сістэма (1) падрабязна вывучана І. Н. Векуа [1]. Л. Г. Міхайлавым [2–3] адзначаны спосаб даследавання абагульненай сістэмы Кашы–Рымана

$$\partial_{\bar{z}}w=aw+b\bar{w}+f,\ \partial_{\bar{z}_1}w=cw+d\bar{w}+g$$

з дзвюма камплекснымі зменнымі. У выпадку, калі $g=z=x+iy$, $h=z_1=x_1+iy_1$, сістэма (1) вывучана Л. Н. Кускоўскім [4].

У дадзенай працы для сістэмы (1), запісанай у выглядзе, праілюструем просты метад знаходжання рашэнняў, пры гэтым лічым, што функцыі a, b, φ, ψ, u, v, g, $\bar{g}$, h, $\bar{h}\in C^1(D)$.

Асноўная частка. Лёгка паказаць, выкарыстоўваючы бікамплексныя функцыі, што сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў (1) эквівалентная раўнанню

$$\left(\frac{\partial}{\partial g}-j\frac{\partial}{\partial h}\right)F(x,y,x_1,y_1)=AF+\Psi,\qquad(3)$$

дзе $F=F(x,y,x_1,y_1)=u-jv$, $A=a-jb$,

$\Psi=\varphi-j\psi$, $j^2=-1$, $j\neq i$.

Заўважым, што фармальныя вытворныя $\frac{\partial}{\partial g},\frac{\partial}{\partial h}$ вызначаныя ў выпадку, калі ў якасці базы для іх знаходжання ўзятая сукупнасць функцый

$$g=g(x,y),\quad \bar{g}=\bar{g}(x,y),$$
$$h=h(x_1,y_1),\quad \bar{h}=\bar{h}(x_1,y_1),$$

прычым $\frac{\partial(g,\bar{g},h,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}\neq 0$ у абсягу D.

Дакажам зараз, што за новую базу можна прыняць функцыі

$$T=g(x,y)+jh(x_1,y_1),\ \bar{g}=\bar{g}(x,y),$$
$$L=g(x,y)-jh(x_1,y_1),\ \bar{h}=\bar{h}(x_1,y_1).$$

Сапраўды,

$$\frac{\partial(T,\bar{g},L,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}=\frac{\partial(g,\bar{g},L,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}+j\frac{\partial(h,\bar{g},L,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}=$$
$$=\frac{\partial(g,\bar{g},g,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}-j\frac{\partial(g,\bar{g},h,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}+j\frac{\partial(h,\bar{g},g,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}+$$
$$+\frac{\partial(h,\bar{g},h,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}=-2j\frac{\partial(g,\bar{g},h,\bar{h})}{\partial(x,y,x_1,y_1)}.$$

У новай базе маем

$$\frac{\partial f}{\partial t_k}=\frac{\partial f}{\partial T}\left(\frac{\partial g}{\partial t_k}+j\frac{\partial h}{\partial t_k}\right)+\frac{\partial f}{\partial \bar g}\frac{\partial \bar g}{\partial t_k}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial L}\left(\frac{\partial g}{\partial t_k}-j\frac{\partial h}{\partial t_k}\right)+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\frac{\partial \bar h}{\partial t_k}= \tag{4}$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial T}+\frac{\partial f}{\partial L}\right)\frac{\partial g}{\partial t_k}+\left(j\frac{\partial f}{\partial T}-j\frac{\partial f}{\partial L}\right)\frac{\partial h}{\partial t_k}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial \bar g}\frac{\partial \bar g}{\partial t_k}+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\frac{\partial \bar h}{\partial t_k},$$

дзе k = 1, 2, 3, 4; $t_1=x, t_2=y, t_3=x_1, t_4=y_1$.

Фармальныя вытворныя $\frac{\partial f}{\partial g}, \frac{\partial f}{\partial \bar g}, \frac{\partial f}{\partial h}, \frac{\partial f}{\partial \bar h}$ у базе $(g,\bar g,h,\bar h)$ вызначаюцца з сістэмы

$$\frac{\partial f}{\partial t_k}=\frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial t_k}+\frac{\partial f}{\partial \bar g}\frac{\partial \bar g}{\partial t_k}+\frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t_k}+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\frac{\partial \bar h}{\partial t_k} \tag{5}$$
$$(k=1, 2, 3, 4).$$

Калі параўноўваць сістэмы (4) і (5), атрымаем

$$\frac{\partial f}{\partial g}=\frac{\partial f}{\partial T}+\frac{\partial f}{\partial L}, \frac{\partial f}{\partial h}=j\frac{\partial f}{\partial T}-j\frac{\partial f}{\partial L}.$$

Адсюль вынікае, што

$$\frac{\partial f}{\partial T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial g}-j\frac{\partial}{\partial h}\right)f,$$
$$\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial g}+j\frac{\partial}{\partial h}\right)f. \tag{6}$$

Калі ўлічваць дыферэнцыяльныя аператоры (6), раўнанне (3) можна запісаць у наступным выглядзе:

$$\frac{\partial F}{\partial T}=BF+\Phi, \tag{7}$$

дзе $F=F(x,y,x_1,y_1)=u-jv$,

$$B=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}(a-jb),$$
$$\Phi=\frac{1}{2}\Psi=\frac{1}{2}(\varphi-j\psi),\ j^2=-1,\ j\neq i,$$
$$\frac{\partial F}{\partial T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial g}-j\frac{\partial}{\partial h}\right)F.$$

Знойдзем агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (7). Спачатку дакажам наступную тэарэму.

Тэарэма 1. Неабходная і дастатковая прымета манагеннасці ў сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагеннасці) [5] функцыі $f(x, y, x_1, y_1)$ па функцыях $\bar g, L, \bar h$ у абсягу D мае выгляд $\frac{\partial f}{\partial T}=0$.

Доказ. *Неабходнасць.* Няхай функцыя f манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава ў абсягу D па функцыях $\bar g, L, \bar h$. Тады знойдуцца такія функцыі $\theta_1=\theta_1(x,y,x_1,y_1)$, $\theta_2=\theta_2(x,y,x_1,y_1)$, $\theta_3=\theta_3(x,y,x_1,y_1)$, што ў гэтым абсягу маем

$$\left.\begin{aligned} f_x&=\theta_1\bar g_x+\theta_2 L_x+\theta_3\bar h_x,\\ f_y&=\theta_1\bar g_y+\theta_2 L_y+\theta_3\bar h_y,\\ f_{x_1}&=\theta_1\bar g_{x_1}+\theta_2 L_{x_1}+\theta_3\bar h_{x_1},\\ f_{y_1}&=\theta_1\bar g_{y_1}+\theta_2 L_{y_1}+\theta_3\bar h_{y_1}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Разгледзім фармальную вытворную

$$\frac{\partial f}{\partial T}=\frac{\begin{vmatrix} f_x & \bar g_x & L_x & \bar h_x\\ f_y & \bar g_y & L_y & \bar h_y\\ f_{x_1} & \bar g_{x_1} & L_{x_1} & \bar h_{x_1}\\ f_{y_1} & \bar g_{y_1} & L_{y_1} & \bar h_{y_1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} T_x & \bar g_x & L_x & \bar h_x\\ T_y & \bar g_y & L_y & \bar h_y\\ T_{x_1} & \bar g_{x_1} & L_{x_1} & \bar h_{x_1}\\ T_{y_1} & \bar g_{y_1} & L_{y_1} & \bar h_{y_1}\end{vmatrix}}.$$

На падставе (8) атрымаем, што

$$\frac{\partial f}{\partial T}=0. \tag{9}$$

Дастатковасць. Мяркуем, што мае месца ўмова (9). Тады сістэма раўнанняў

$$\left.\begin{aligned} f_x&=\frac{\partial f}{\partial T}T_x+\frac{\partial f}{\partial \bar g}\bar g_x+\frac{\partial f}{\partial L}L_x+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\bar h_x,\\ f_y&=\frac{\partial f}{\partial T}T_y+\frac{\partial f}{\partial \bar g}\bar g_y+\frac{\partial f}{\partial L}L_y+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\bar h_y,\\ f_{x_1}&=\frac{\partial f}{\partial T}T_{x_1}+\frac{\partial f}{\partial \bar g}\bar g_{x_1}+\frac{\partial f}{\partial L}L_{x_1}+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\bar h_{x_1},\\ f_{y_1}&=\frac{\partial f}{\partial T}T_{y_1}+\frac{\partial f}{\partial \bar g}\bar g_{y_1}+\frac{\partial f}{\partial L}L_{y_1}+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\bar h_{y_1},\end{aligned}\right\}$$

з якой вызначаюцца фармальныя вытворныя

$$\frac{\partial f}{\partial T}, \frac{\partial f}{\partial \bar g}, \frac{\partial f}{\partial L}, \frac{\partial f}{\partial \bar h},$$

прыме наступны выгляд:

$$\left.\begin{aligned} f_x&=\frac{\partial f}{\partial \bar g}\bar g_x+\frac{\partial f}{\partial L}L_x+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\bar h_x,\\ f_y&=\frac{\partial f}{\partial \bar g}\bar g_y+\frac{\partial f}{\partial L}L_y+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\bar h_y,\\ f_{x_1}&=\frac{\partial f}{\partial \bar g}\bar g_{x_1}+\frac{\partial f}{\partial L}L_{x_1}+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\bar h_{x_1},\\ f_{y_1}&=\frac{\partial f}{\partial \bar g}\bar g_{y_1}+\frac{\partial f}{\partial L}L_{y_1}+\frac{\partial f}{\partial \bar h}\bar h_{y_1},\end{aligned}\right\}$$

а гэта і ёсць умова (8).

Тэарэма 2. Агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных (3) мае наступны выгляд:

$$F = e^{\alpha}\left(\beta + \theta[\bar{g}, L, \bar{h}]\right), \qquad (10)$$

дзе $\theta[\bar{g}, L, \bar{h}]$ – адвольная функцыя, манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава [5] па функцыях $\bar{g}$, $L = g(x,y) - jh(x_1,y_1)$, $\bar{h}$ у абсягу D; α, β – якія-небудзь частковыя рашэнні раўнанняў

$$\frac{\partial\alpha}{\partial T} = B, \ \frac{\partial\beta}{\partial T} = \Phi e^{-\alpha}. \qquad (11)$$

Доказ. Сапраўды, на падставе (11) маем

$$\frac{\partial(Fe^{-\alpha} - \beta)}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial T}e^{-\alpha} - Fe^{-\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial T} - \frac{\partial\beta}{\partial T} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial T}e^{-\alpha} - Fe^{-\alpha}B - \Phi e^{-\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial T} - BF - \Phi\right)e^{-\alpha} = 0,$$

адкуль (на падставе тэарэмы 1) і атрымаем (10):

$$Fe^{-\alpha} - \beta = \theta\left[\bar{g}, L, \bar{h}\right],$$

гэта значыць

$$F = e^{\alpha}\left(\beta + \theta[\bar{g}, L, \bar{h}]\right).$$

Даследуем больш падрабязна агульнае рашэнне (10) раўнання (7).

Мяркуем $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(1+ij)$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1-ij)$. Тады

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \ \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 = 0,$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1, \ i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = j.$$

Функцыі

$$\bar{g} = \bar{g}(x,y), \ L = \bar{g}(x,y) - j\bar{h}(x_1,y_1), \ \bar{h} = \bar{h}(x_1,y_1)$$

можна запісаць наступным чынам:

$$\bar{g} = \bar{g}(x,y)\varepsilon_1 + \bar{g}(x,y)\varepsilon_2,$$

$$L = (\bar{g}(x,y) + i\bar{h}(x_1,y_1))\varepsilon_1 + (\bar{g}(x,y) - i\bar{h}(x_1,y_1))\varepsilon_2,$$

$$\bar{h} = \bar{h}(x_1,y_1)\varepsilon_1 + \bar{h}(x_1,y_1)\varepsilon_2.$$

Заўважым, што

$$e^{\alpha} = \exp(\tau\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2) =$$

$$= 1 + \frac{\tau\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2}{1!} + \frac{(\tau\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2)^2}{2!} + \frac{(\tau\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + \left(\frac{\tau}{1!} + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} + \ldots\right)\varepsilon_1 + \left(\frac{\gamma}{1!} + \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^3}{3!} + \ldots\right)\varepsilon_2 =$$

$$= 1 + (\exp\tau - 1)\varepsilon_1 + (\exp\gamma - 1)\varepsilon_2,$$

$$\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2 = \tau\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2, \ \tau = \alpha_1 - i\alpha_2,$$

$$\beta = \beta_1 + j\beta_2 = \zeta\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2, \ \zeta = \beta_1 - i\beta_2, \ \eta = \beta_1 + i\beta_2,$$

$$\theta[\bar{g}, L, \bar{h}] = \theta_1 + j\theta_2 = Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2, \ Q_1 = \theta_1 - i\theta_2,$$

$$Q_2 = \theta_1 + i\theta_2.$$

Лёгка даказаць наступную тэарэму.

Тэарэма 3. Для таго каб функцыя

$$\theta[\bar{g}, L, \bar{h}] = \theta_1 + j\theta_2 = Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2$$

была F-манагеннай па функцыях $\bar{g}, L, \bar{h}$ у абсягу D, неабходна і дастаткова, каб функцыя $Q_1 = \theta_1 - i\theta_2$ была F-манагеннай у абсягу D па камплексных функцыях

$$\bar{g}(x,y), \ \bar{g}(x,y) + i\bar{h}(x_1,y_1), \ \bar{h}(x_1,y_1),$$

а камплексная функцыя $Q_2 = \theta_1 + i\theta_2$ была F-манагеннай у абсягу D па функцыях

$$\bar{g}(x,y), \ \bar{g}(x,y) - i\bar{h}(x_1,y_1), \ \bar{h}(x_1,y_1).$$

Заключэнне. Такім чынам,

$$\theta[\bar{g}, L, \bar{h}] = Q_1[\bar{g}, \bar{g} + i\bar{h}, \bar{h}]\varepsilon_1 + Q_2[\bar{g}, \bar{g} - i\bar{h}, \bar{h}]\varepsilon_2,$$

дзе $Q_1[\bar{g}, \bar{g} + i\bar{h}, \bar{h}]$ – адвольная камплексная функцыя, манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава ў абсягу D па функцыях $\bar{g}, \bar{g} + i\bar{h}, \bar{h}$, а $Q_2[\bar{g}, \bar{g} - i\bar{h}, \bar{h}]$ – адвольная камплексная функцыя, манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава па функцыях $\bar{g}, \bar{g} - i\bar{h}, \bar{h}$.

Такім чынам, агульнае рашэнне (10) дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных (7) мае наступны выгляд:

$$F = ((\zeta + Q_1[\bar{g}, \bar{g} + i\bar{h}, \bar{h}])\exp\tau)\varepsilon_1 +$$

$$+ ((\eta + Q_2[\bar{g}, \bar{g} - i\bar{h}, \bar{h}])\exp\gamma)\varepsilon_2.$$

Літаратура

1. *Векуа, И. Н.* Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М. : Физматгиз, 1959. – 628 с.
2. *Михайлов, Л. Г.* Обобщенная система Коши–Римана со многими независимыми переменными / Л. Г. Михайлов, А. В. Абросимов // Доклады АН СССР.– 1973.– Т. 210, № 1.– С. 26–29.
3. *Михайлов, Л. Г.* Об одном способе исследования обобщенной системы Коши–Римана с двумя независимыми комплексными переменными / Л. Г. Михайлов // Доклады АН Таджикской ССР. – 1974. – Т. 17, № 9.– С. 7–9.
4. *Кусковский, Л. Н.* Об одной обобщенной системе Коши–Римана с двумя независимыми комплексными переменными / Л. Н. Кусковский // Известия вузов. Математика. – 1980. – № 7. – С. 45–47.
5. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика.– 1958. – № 6.– С. 257–265.

Summary

Using F-monogenic functions, the authors analyzed the generalized Cauchy-Riemann system with two independent complex variables.

Паступіў у рэдакцыю 02.04.2015 г.