УДК 530:[1], 539:[182]

А. Н. Лаврёнов / A. Lavrenov
Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка (Минск, Беларусь)

КЛАСС СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫХ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

THE CLASS OF SUPERINTEGRABLE CLASSICAL SYSTEMS

В статье предлагается новый метод построения классических D-мерных минимально суперинтегрируемых систем на основе определенной форм-инвариантности реализации алгебры $SU(1,1)$. Показана, что их скрытая симметрия реализуется в виде классической версии квадратичной алгебры Хана $QH(3)$.

A new method for constructing classical D-dimensional superintegrable systems based on a certain form-invariance implementation of the $SU(1,1)$ algebra are proposed in the article. It is shown that their hidden symmetry is realized in the form of a classical version of the quadratic Hahn algebra $QH(3)$.

Ключевые слова: суперинтегрируемые системы, алгебра $SU(1,1)$, классическая алгебра Хана.

Keywords: superintegrable systems, SU(1,1) algebra, classical Hahn algebra.

Механическая система называется «суперинтегрируемой» [1], если она обладает большим числом независимых интегралов движения, чем его степеней свободы. Исследование таких систем представляет собой большой интерес как в классической, так и в квантовой теории из-за их богатых математических (ортогональные многочлены, гипергеометрические и эллиптические функции, трансценденты Пенлеве и т. д.) и физических (спины, магнитные поля и монополи и т. д.) свойств. Широко известные примеры суперинтегрируемых моделей включают в себя гармонический осциллятор и атом водорода в D- измерениях.

Двумерные суперинтегрируемые системы и лежащие в их основе квадратичные алгебры были классифицированы в [1–2]. Классификация трехмерных суперинтегрируемых гамильтонианов представляет собой гораздо более сложную задачу [3–4]. Ожидается, что D-размерные системы обеспечат ценную информацию о свойствах суперинтегрируемых систем и их алгебраических структурах. Были разработаны различные подходы для создания D-мерных систем, которые основывались на коалгебре, тензорном произведении, факторизации и др. Отмечается, что нахождение симметрии алгебры D-мерных суперинтегрируемых систем является трудной задачей даже при знании других основных алгебраических структур, например, факторизации.

В статье предлагается новый метод построения классических D-мерных минимально суперинтегрируемых систем на основе определенной форм-инвариантности реализации алгебры $SU(1,1)$. Чтобы ее уточнить, вначале кратко напомним основные особенности классической алгебры $SU(1,1)$. Она имеет три классические динамические переменные $(J_3; J_\pm)$, которые подчиняются следующим отношениям:

$$\{J_-; J_+\} = J_3; \qquad \{J_3; J_\pm\} = \pm J_\pm,$$

где Пуассонова скобка определяется обычным образом в N-мерном пространстве:

$$\{f; g\} = \sum_{j=1}^{j=N} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} f \frac{\partial}{\partial p_j} g - \frac{\partial}{\partial p_j} f \frac{\partial}{\partial x_j} g \right\}.$$

Для данной алгебры элемент Казимира имеет выражение:

$$C = J_3^2 - J_+ J_-.$$

Конкретную одномерную реализацию такой алгебры для трех классических динамических переменных $(J_3; J_\pm)$ обычно выбирают в следующем виде:

$$J_+ = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{a}{x^2}\right); \qquad J_- = \frac{x^2}{2}; \qquad J_3 = \frac{xp}{2}.$$

В ней элемент Казимира получает такое значение:

$$C = -\frac{a}{4}.$$

Однако нетрудно проверить, что отношениям алгебры $SU(1,1)$ подчиняются и такие классические динамические переменные $(J_3; J_\pm)$, определяемые в k-измерениях.

$$J_+ = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \cdots + p_k^2 + \frac{a_k}{x_1^2+\cdots+x_k^2}\right); \quad J_- = \frac{x_1^2+\cdots+x_k^2}{2}; \quad J_3 = \frac{x_1 p_1+\cdots+x_k p_k}{2}.$$

Здесь число измерений k не фиксировано, и поэтому мы говорим об определенной форм-инвариантности реализации алгебры $SU(1,1)$.

В такой реализации элемент Казимира имеет следующее значение:

$$C = -\frac{\sum_{i,j=1}^{i,j=k} L_{ij}^2 + a_k}{4},$$

где компоненты момента импульса L_{ij} определяются стандартным образом:

$$L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i.$$

Далее введем две независимые классические алгебры $SU(1,1)$ A и B с соответствующими значениями элементов Казимира C_A.и C_B и определим новый гамильтониан:

$$H = J_3^1 + J_3^2,$$

где верхние индексы отвечают номеру рассматриваемой алгебры, а нижние индексы нумеруют соответствующую классическую динамическую переменную.

Существуют два независимых интеграла

$$K_1 = J_3^1 - J_3^2,$$

$$K_2 = C_{A+B} = C_A + C_B + 2J_3^1 J_3^2 - J_+^1 J_-^2 - J_-^1 J_+^2,$$

которые есть интегралы движения: $\{H; K_1\} = \{H; K_2\} = 0$.

Легко убедиться, что они формируют классический вариант квадратичной алгебры Хана $QH(3)$:

$\{K_1; K_2\} = K_3;$

$\{K_2; K_3\} = -4K_1K_2 + 4(C_A - C_B)E;$

$\{K_3; K_1\} = 4(C_A + C_B) + 2E^2 - 4K_2 - 2K_2^2.$

Таким образом, в статье предложен новый метод построения классических D-мерных минимально суперинтегрируемых систем на основе определенной форм-инвариантности реализации алгебры $SU(1,1)$. Показана, что их скрытая симметрия реализуется в виде классической версии квадратичной алгебры Хана $QH(3)$. Полученный результат можно считать практическим воплощением на классическом уровне представленного ранее материала в [5].

Список использованных источников

1. Miller Jr. W., Post S., Winternitz P. Classical and Quantum Superintegrability with Applications / Jr. W. Miller, S. Post, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Theor. – 2013. – vol. 46. – P. 423001.
2. Miller Jr. W. The theory of contractions of 2D 2nd order quantum superintegrable systems and its relation to the Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials / Jr. W. Miller // J. Phys. Conf. Ser. – 2014. – vol. 512, – P. 012012.
3. Escobar-Ruiz M.A., Miller Jr. W. (2017). Toward a classification of semi-degenerate 3D superintegrable systems. / M.A. Escobar-Ruiz, Jr. W. Miller // J. Phys. A: Math. Theor. – 2017. – vol. 50. – P. 095203.
4. Genest V.X., Vinet L., Zhedanov A. Superintegrability in Two Dimensions and the Racah–Wilson Algebra. // Lett. Math. Phys. 2014. Vol. 104, P. 931–952.
5. Лаврёнов, А. Н. Класс многомерных точно-решаемых моделей [Электронный ресурс] / А. Н. Лаврёнов // Инновационные технологии в системе физико-математического образования : материалы междунар. науч.-практ. интернет-конф., Минск, 26–27 нояб. 2020 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка. – Минск, 2020. – Режим доступа: https://phys.bspu.by/forum/viewtopic.php?f=10&t=150. – Дата доступа: 27.11.2020.