УДК 534. 512

А. И. Кириленко, А. С. Межинская
A. Kirilenko, A. Miazhynskaya
Белорусская государственная академия авиации
(Минск, Беларусь)

ОСОБЕННОСТИ ТРАЕКТОРИЙ, ОБРАЗУЕМЫХ СЛОЖЕНИЕМ НЕПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

FEATURES OF THE TRAJECTORIES FORMED BY THE ADDITION OF NON-PERPENDICULAR OSCILLATIONS

Рассмотрено сложение двух колебаний, совершаемых в плоскости, между направлениями которых имеется угол. Частоты складываемых колебаний могут относиться как иррациональные числа. В этом случае траектория точки непрерывным образом заштриховывает внутренность некоторого параллелограмма, причем таким образом, что в нем остаются зоны недоступности, куда точка не попадает за заданный промежуток времени. Рассмотрено также сложение двух круговых колебаний (поляризаций).

The article contains a review of two oscillations addition between the directions of which there is an angle performed in a plane. The frequencies of the added oscillations are represented as irrational numbers. In this case, the trajectory of the point continuously shades the interior of a certain parallelogram, and in such a way that there are inaccessible zones in it, where the point does not fall within a given period of time. The addition of two circular oscillations (polarizations) is also considered.

Ключевые слова: колебания гармонические, сложение колебаний, траектории в плоскости.

Keywords: harmonic oscillations, addition of oscillations, trajectories in the plane.

Рассмотрим сложение двух линейных не взаимно перпендикулярных колебаний (поляризаций). В механике этот случай соответствует сложению колебаний точки на пружинах, составляющих угол α между собой. Итак, пусть первое колебание совершается вдоль оси Ox:

$$x_1 = A\cos\omega t \qquad (1)$$

а второе – под углом α к этой оси:

$$x_2 = B\cos\alpha\cos(\omega_1 t+\varphi), \qquad y_2 = B\sin\alpha\cos(\omega_1 t+\varphi). \qquad (2)$$

По принципу суперпозиции результирующее колебание описывается выражениями

$$x = A\cos\omega t + B\cos\alpha\cos(\omega_1 t+\varphi), \quad y = B\sin\alpha\cos(\omega_1 t+\varphi)). \qquad (3)$$

Сложить эти колебания не представляет труда. Максимальное по модулю значение смещения $x(t)$ имеет вид:

$$x_{\max}^2 = A^2 + B^2\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\cos\varphi. \qquad (4)$$

Соотношения (3) и (4) важны для проверки результатов сложения колебаний с разными частотами. Для выражений (3) результирующее колебание будет поляризовано по эллипсу. После некоторых преобразований получаем

$$C = A + B\cos\alpha\cos\varphi,\ D = B\cos\alpha\sin\varphi,\ E = AB\cos\varphi\sin\alpha,\ F = B\cos\varphi\sin\alpha,$$

$$E^2+F^2 = B^2\sin^2\alpha,\ C^2+D^2 = x_{\max}^2,\ EC+FD = B\sin\alpha(A\cos\varphi + B\cos\alpha).$$

$$EC + FD = B\sin\alpha\,(A\cos\varphi + B\cos\alpha);\ FC - ED = A F = A B\sin\alpha\sin\varphi. \qquad .(5)$$

Отсюда получаем уравнение эллипса в наших обозначениях:

$$B^2\sin^2\alpha\cdot x^2 + (A^2 + B^2\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\cos\varphi)\cdot y^2 - 2B\sin\alpha(A\cos\varphi +$$

$$+ B\cos\alpha)\cdot xy = (AB\sin\alpha\sin\varphi)^2. \qquad (6)$$

Угол наклона $\alpha_н$ большой оси эллипса к оси x находим из соотношения

$$tg\,2\alpha_н = -\frac{2B\sin\alpha\,(A\cos\varphi + B\cos\alpha)}{A^2 + B^2\cos 2\alpha + 2AB\cos\alpha\cos\varphi}. \qquad (7)$$

Этот результат может быть полезен в дальнейшем как предельный случай.

Обратимся к общему случаю $\omega \neq \omega_1$. Рассмотрим пределы, в которых могут изменяться смещения x и y. Представим первое уравнение из (3) в виде

$$cos\,(\omega_1 t+\varphi) = \frac{x - A\cos\omega t}{B\cos\alpha}. \qquad (8)$$

Подставим это выражение в y(t), полученное из второго равенства (3). Имеем

$$y = tg\alpha(x - A\cos\omega t). \qquad (9)$$

Отсюда получаем, что предельные значения смещений x и y связаны соотношениями:

$$y = tg\alpha(x - A), \qquad y = tg\alpha(x + A). \qquad (10)$$

Итак, траектория, заданная параметрическим уравнением (3), оказывается вписанной в параллелограмм, нижняя и верхняя стороны которого определяются выражениями $y = \pm B\sin\alpha$, а боковые стороны задаются уравнениями (10).

Расчет показывает, что при иррациональном отношении частот указанный параллелограмм заштриховывается в определенном порядке и в нем имеются области, которые не достигаются за конечное число периодов колебаний.

Рассмотрим задачу о сложении двух круговых поляризаций разных частот. В механике этот случай соответствует качению одной окружности по неподвижной другой. Можно исходить из уравнения окружности радиуса r с центром в точке z_1 комплексной плоскости. В действительной плоскости будем иметь

$$x\vec{i} + y\vec{j} = C\cos\omega_1 t\,\vec{i} + C\sin\omega_1 t\,\vec{j} + r\cos\omega_2 t\,\vec{i} + r\sin\omega_2 t\,\vec{j}\,. \tag{11}$$

Откуда

$$x(t) = C cos\,\omega_1\, t + r\cos\omega_2\, t\,,\quad y(t) = C\sin\omega_1\, t + r\sin\omega_2\, t\,. \tag{12}$$

Часто полагают $C = R + r > r$, $\omega_2 > \omega_1$. Траектории $y(x)$ имеют вид циклоидальных кривых. Рассмотрим специальный случай соотношения амплитуд и частот складываемых сложных колебаний, приводящий к траекториям в виде циклоид. Циклоиды представляет собой кривые, описываемые точкой, лежащей вне или внутри окружности, катящейся без проскальзывания по другой кривой (прямой, окружности и проч.) вне (эпи-) или внутри нее (гипо-). В механике [1, с. 109] наиболее частный случай, когда базовая кривая – окружность. Тогда в параметрическом виде эти кривые задаются уравнениями (параметром λ включены укороченные эпи- и гипоциклоиды):

$$x(t) = (A + a) cos\,\omega t - a\lambda\cos\big((A + a)/a)\omega t\big);$$

$$y(t) = (A + a)\sin\omega t - a\lambda\sin\left(\frac{A + a}{a}\omega t\right), \tag{13}$$

где A, a, λ и ω – параметры. Для гипоциклоид в (13) следует поменять знак перед a. При отношении $A/a = 2$ известна теорема Птолемея, согласно которой гипоциклоида вырождается в отрезок прямой. В наших обозначениях из (13) имеем:

$$x(t) = 2 cos\omega t\,\mathrm{t},\ y(t) = 0\,. \tag{14}$$

Этот результат можно использовать для контроля расчетов. В целом, ввиду многочисленных приложений циклоиды изучены весьма тщательно, но их связь с колебаниями не подчеркивалась.

Параметрическое задание циклоид в виде (13) можно рассматривать как сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Как видно, частоты и амплитуды складываемых колебаний по каждой из осей для обычной ($\lambda = 1$) эпициклоиды находятся в специальном соотношении:

$$A_1 / A_2 = 1 + (A / a). \qquad \omega_2 / \omega_1 = a. \qquad . \qquad (15)$$

Отметим, что фазы колебаний, совершаемые по разным направлениям, сдвинуты на $\pi / 2$ на соответствующих частотах. При A, равном нулю, имеем обычные траектории в виде эллипсов. При изменении величины A / a изменяется количество витков гипоциклоиды, а от величины λ зависит ширина этих витков.

Если отношение частот иррационально, то, как и в случае фигур Лиссажу [2, с. 573], мы имеем незамкнутые циклоиды и образование зон недостижимости на плоскости x, y, куда материальная точка не попадает за конечное число периодов колебаний. В теории множеств доказывается, что на плоскости существуют точки, через которые наша траектория не пройдет никогда, и, в то же время, она может приблизиться к такой точке близко, но при большой длительности процесса.

Итак, зоны недостижимости формируются при иррациональном отношении частот складываемых колебаний. Они особенно заметны при малых иррациональностях типа $\omega_2 : \omega_1 = \sqrt{2}$. При этом число периодов складываемых колебаний невелико – порядка ста. Зоны проявляются в прямоугольной области, в области в форме параллелограмма и в области между двумя окружностями. Ориентация, размеры и форма зон недостижимости определяются: формой области плоскости, которую заштриховывает материальная точка при движении; размером этой области, т. е. соотношением амплитуд складываемых колебаний; соотношением частот складываемых колебаний; соотношением фаз складываемых колебаний.

Список использованных источников

1. Савелов, А. А. Плоские кривые / А. А. Савелов. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 293 с.

2. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – Москва: Изд-во «Наука» Глав. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 720 с.