УДК 372.851.

Н. К. Пещенко, М. А. Андреева
N. Peshchanka, M. Andreeva
Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка (Минск, Беларусь)

ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

TEACHING STUDENTS TO SOLVE GEOMETRIC OPTIMIZATION PROBLEMS

Рассматриваются практико-ориентированные задачи школьного курса планиметрии на нахождение наибольшего и наименьшего значений величин. Анализируется методика обучения их решению средствами элементарной математики и с помощью аппарата математического анализа.

The applied tasks of the school planimetry course on finding the largest and smallest values are considered. The methodology of teaching their solution by means of elementary mathematics and using the apparatus of mathematical analysis is analyzed.

Ключевые слова: геометрия, планиметрия, задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений.

Keywords: geometry, planimetry, tasks for finding the largest and smallest value.

В жизни нам постоянно приходится сталкиваться с необходимостью принимать оптимальное («лучшее» в определенных условиях) решение в той или иной ситуации. Иногда находить его довольно сложно, и тогда на помощь приходит математика.

Современные учащиеся уже в средней школе получают представление о задачах на оптимизацию (на экстремумы), под которыми мы понимаем задачи, ставящие своей целью поиск наиболее эффективного, выгодного в определенных отношениях, наиболее экономного и наименее трудоемкого решения.

Простейшие экстремальные задачи учащиеся начинают решать уже в 5–6 классах. Наибольший интерес представляют задачи на вычисление площадей и периметров геометрических фигур. Методом их решения, в основном, является метод перебора. В них допускается несколько неравнозначных решений, и учитель акцентирует внимание обучаемых на нахождении наиболее целесообразного и эффективного. Решение таких задач формирует первое представление о максимальном произведении при постоянной сумме двух переменных и о минимальной сумме при постоянном произведении. Примерами таких задач могут быть следующие: 1) Какие размеры должны быть у садового участка прямоугольной формы заданной площади, чтобы материальные затраты на забор были наименьшими? 2) Периметр прямоугольника равен 64 см. Какие у него должны быть стороны, чтобы площадь была наибольшей? Результаты вычислений в зависимости от выбора данных целесообразно свести в таблицу, по которой обучаемым легче сделать выводы.

В 7–9-х классах диапазон приемов решения экстремальных задач методами элементарной математики значительно расширяется. Они подразделяются на аналитические (использование наибольшего и наименьшего значений квадратного трехчлена; теорем о достижении суммой и произведением положительных чисел экстремальных значений; теоремы о среднем геометрическом и среднем арифметическом) и геометрические (методы геометрических преобразований; метод развертки). Как видим, методы различны и многообразны, каждый по-своему интересен и актуализирует знания учащихся из определенной области алгебры или геометрии.

В процессе решения таких задач работа учителя направлена на развитие логического мышления и воспитание исследовательской культуры учащихся. Однако заметим, что поиск решения экстремальных задач перечисленными выше элементарными методами включает в себя элементы догадки и творчества и вызывает у обучаемых некоторые затруднения.

В отличие от перечисленных приемов действительно универсальный метод, применимый для решения экстремальных задач, дает использование производной. Она позволяет осуществлять алгоритмический подход к решению таких задач.

Умение решать задачи с помощью производной формируется в 10-х классах и является одной из важных целей изучения начал математического анализа. Задачи на оптимизацию имеют четкую прикладную направленность. В них представлены все фазы построения и использования математической модели: формализация – составление функции, описывающей условие задачи; решение формализованной задачи – поиск значений аргумента, при которых значение производной функции равно нулю или при которых она не существует; интерпретация – перевод полученного решения с языка математики на естественный язык в терминах начального условия, т. е. придание полученному результату соответствующего содержательного смысла.

Рассмотрим решение экстремальной задачи по планиметрии.

Задача. В прямоугольный треугольник *ABC*, с гипотенузой $AB = 30$ см и углом А = 30°, вписан прямоугольник *KLMN*, одна из сторон которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей.

Решение. Обозначим через x и y стороны прямоугольника *KLMN.* Пусть $LK = x$ и $LM = y$. Запишем формулу площади прямоугольника $S_{KLMN} = xy$ и выразим у через x.

В ΔALK: $AL = 2x$ и $AK = x\sqrt{3}$. ΔMNB: $NB = \frac{x}{3}\sqrt{3}$.

Следовательно, $y = 30 – AK – NB = 30 – x\sqrt{3} - \frac{x}{3}\sqrt{3} = 30 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x$.

$S_{KLMN} = x\cdot(30 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x) = 30x - \frac{4\sqrt{3}}{3}x^2$. Далее, в зависимости от класса, учащиеся могут продолжить решение задачи различными способами.

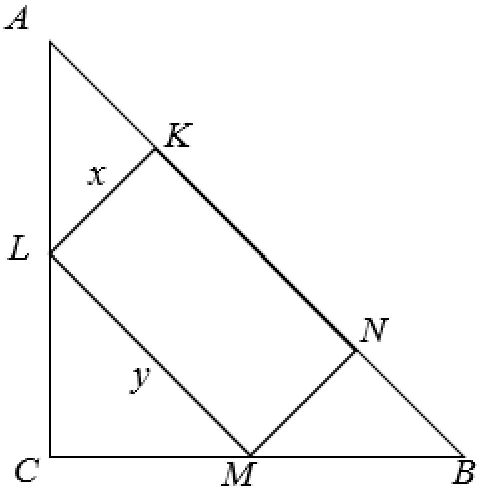

Рисунок 1

Решение 1. Рассмотрим функцию $S(x) = 30x - \frac{4\sqrt{3}}{3}x^2$, $x \in (0;\ 15\sqrt{3})$. $S'(x) = 30 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x$. $S'(x) = 0$, значит $\frac{8\sqrt{3}}{3}x = 30$, откуда $x = \frac{45}{4\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Несложно показать, что данная точка является точкой максимума функции $S(x)$. Найдем вторую сторону прямоугольника: $y = 30 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{15\sqrt{3}}{4} = 30 - 15 = 15$. Итак, получили, что длины сторон искомого прямоугольника равны 15 и $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Экстремальные задачи в силу своих особенностей и возможностей допускают различные приемы решения. Для нарушения стереотипа мышления обучаемых старших классов важно показать им примеры, в которых наибольшее или наименьшее значения функции можно найти с помощью элементарных алгебраических или геометрических рассуждений, например, с использованием свойств квадратичной функции. Зачастую использование не универсальных, а элементарных методов приводит к более простым решениям.

Решение 2. Рассмотрим квадратичную функцию $S(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}x^2 + 30x$.

Найдем абсциссу вершины данной параболы: $x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-30\cdot\sqrt{3}}{2\cdot4\sqrt{3}} = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{4}$.

Ветви параболы направлены вниз, следовательно, в точке $x = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{4}$ квадратичная функция достигает наибольшего значения. Остается найти у.

Решение 3. Простейшим и в то же время универсальным приемом решения аналогичных задач является выделение квадрата двучлена.

$$-\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot x^2 + 30x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}(x^2 - \frac{30\cdot3}{4\sqrt{3}}\cdot x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot(x^2 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\cdot x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot(x^2 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\cdot x + \frac{225\cdot3}{16} - \frac{225\cdot3}{16}) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot(\left(x - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{225\cdot3}{16}) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\left(x - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{225\cdot3}{16}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3} =$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\left(x - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{225\sqrt{3}}{4}.$$

Преобразовав трехчлен, делаем вывод, что при $x = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{4}$ он принимает наибольшее значение.

В заключение отметим, что важно на самых ранних этапах изучения математики рассматривать решение задач на экстремумы, сочетая и сопоставляя различные способы и методы их решения. Решая экстремальные задачи, обучаемые овладевают простейшими приемами применения математики на практике, учатся думать, изобретать новые решения, овладевают опытом творчества.