ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2012, том 48, № 2, с. 266–273

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2012 г. В. Н. Русак, Н. В. Гриб

В пространстве непрерывных периодических функций построены интерполяционные рациональные операторы, на их основе получены квадратурные формулы с положительными коэффициентами, точные на рациональных тригонометрических функциях порядка $2n$, и предложен алгоритм приближенного решения интегральных уравнений второго рода. Найдена оценка погрешности приближенного решения в терминах наилучших тригонометрических рациональных приближений ядра и правой части интегрального уравнения.

Интерполяционные квадратурные формулы, предназначенные для интегрирования периодических функций, хорошо приближаемых тригонометрическими полиномами, изучены достаточно полно [1, 2]. На их основе разработаны приближенные методы решения интегральных уравнений, ядра и коэффициенты которых аппроксимируются полиномами (см., например, [3, с. 511]). В настоящей работе рассматриваются интерполяция периодических функций рациональными операторами и ее приложения к построению квадратурных формул типа Гаусса и приближенному решению интегральных уравнений второго рода.

Пусть $|\alpha_k| < 1$, $k = \overline{1,n}$, $\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n (z-\alpha_k)/(1-\overline{\alpha_k}z)$ – произведение Бляшке. Поскольку $|\pi_n(z)| = 1$ на единичной окружности, то выполняется равенство

$$\pi_n(e^{i\varphi}) = e^{i\Phi_n(\varphi)}, \tag{1}$$

где $\Phi_n(\varphi) = \arg \pi_n(e^{i\varphi})$, $0 \le \Phi_n(0) = \arg \prod_{k=1}^n (1-\alpha_k)/(1-\overline{\alpha_k}) < 2\pi$. Используя равенство (1), нетрудно проверить, что

$$\Phi_n'(\varphi) = \sum_{k=1}^n \frac{1-|\alpha_k|^2}{(e^{i\varphi}-\alpha_k)(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k})} > 0. \tag{2}$$

Следовательно, при изменении φ от 0 до 2π аргумент $\Phi_n(\varphi)+\varphi/2$ возрастает от $\Phi_n(0)$ до $\Phi_n(0)+(2n+1)\pi$, соответственно функция $\sin(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)$ имеет нули в точках $\{\varphi_k\}$:

$$0 \le \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{2n} < 2\pi.$$

Непосредственно проверяется также с учетом равенства (1) и формул Эйлера, что

$$\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{e^{i\varphi/2}}{2iq_n(\varphi)}\prod_{k=1}^n (1-\alpha_k e^{-i\varphi})(e^{i\varphi}-\alpha_k) - e^{-i\varphi/2}\prod_{k=1}^n (1-\overline{\alpha_k}e^{i\varphi})(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}) = \frac{p_{n+1/2}(\varphi)}{q_n(\varphi)}, \tag{3}$$

$$q_n(\varphi) = \prod_{k=1}^n (e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k})(e^{i\varphi}-\alpha_k),$$

где $p_{n+1/2}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка $n+1/2$ с действительными коэффициентами, нулями которого являются точки $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$. В таком случае справедливо разложение [4, с. 17]

$$p_{n+1/2}(\varphi) = C\prod_{k=0}^{2n} \sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}. \tag{4}$$

Заметим, что $\cos(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)$ также является функцией вида (3) с некоторым тригонометрическим полиномом полуцелого порядка в числителе и тем же знаменателем, причем выполняются равенства

$$\cos\biggl(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\biggr)=(-1)^k\cos\biggl(\Phi_n(\varphi_0)+\frac{\varphi_0}{2}\biggr).$$

Будем обозначать через $Q_{n,1}$ множество $\{p_n(x)/q_n(x)\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше n с фиксированным знаменателем $q_n(x)$, соответственно через $Q_{n,2}$ множество $\{p_{2n}(x)/q_n^2(x)\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше $2n$ с фиксированным знаменателем $q_n^2(x)$.

Для любой функции $f(\varphi)$ из пространства $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций построим интерполяционный рациональный оператор L_n, полагая

$$L_n(\varphi,f)=\sum_{k=0}^{2n}f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi),\quad l_{k,n}(\varphi)=\frac{\sin(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)\cos(\Phi_n(\varphi_k)+\varphi_k/2)}{\sin((\varphi-\varphi_k)/2)(1+2\Phi_n'(\varphi_k))}.\tag{5}$$

Лемма 1. *Введенный равенством (5) оператор* L_n

1) любую функцию $f\in C_{2\pi}$ *отображает в тригонометрическую рациональную функцию из* $Q_{n,1}$;

2) удовлетворяет условиям $L_n(\varphi_k,f)=f(\varphi_k)$, $k=\overline{0,2n}$;

3) является точным на множестве $Q_{n,1}$.

Доказательство. В силу представления (4) при делении полуцелого тригонометрического полинома $p_{n+1/2}(\varphi)$ на $\sin((\varphi-\varphi_k)/2)$ получим тригонометрический полином $p_{k,n}(\varphi)$ целого порядка n. Слагаемые $f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi)$ с учетом (3) отличаются лишь на константы от $p_{k,n}(\varphi)/q_n(\varphi)$, т.е. являются рациональными функциями порядка не выше n с одним и тем же знаменателем $q_n(\varphi)$. Следовательно, $\sum_{k=0}^{2n}f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi)\in Q_{n,1}$.

Из равенств (4) и (5) следует, что $l_{k,n}(\varphi_j)=0$, если $k\ne j$. Если же $k=j$, то по правилу Лопиталя имеем

$$l_{j,n}(\varphi_j)=\lim_{\varphi\to\varphi_j}l_{j,n}(\varphi)=\lim_{\varphi\to\varphi_j}\frac{\cos(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)(\Phi_n'(\varphi)+1/2)\cos(\Phi_n(\varphi_j)+\varphi_j/2)}{\cos((\varphi-\varphi_j)/2)(1+2\Phi_n'(\varphi_j))/2}=1.$$

Тогда

$$L_n(\varphi_k,f)=\sum_{k=0}^{2n}f(\varphi_j)l_{j,n}(\varphi_k)=\sum_{k\ne j}0+f(\varphi_k)\cdot 1=f(\varphi_k).$$

Если тригонометрическая рациональная функция $r_n(\varphi)\in Q_{n,1}$, то разность $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)$ принадлежит $Q_{n,1}$ и обращается в нуль в точках φ_k, $k=\overline{0,2n}$, т.е. $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)$ имеет $2n+1$ нуль на $[0,2\pi)$, поэтому $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)\equiv 0$, так как тригонометрический полином порядка не выше n имеет не более $2n$ нулей в полуполосе $0\le\operatorname{Re}z<2\pi$.

Норма в пространстве $C_{2\pi}$ определена равенством $\|f\|_{C_{2\pi}}=\max\{|f(\varphi)|,\ \varphi\in[0,2\pi]\}$. Отметим также, что интерполяционный оператор (5) рассматривается как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$, так что (см., например, [5, с. 201])

$$\|L_n(\varphi,f)\|_{C_{2\pi}}\le\|L_n\|\|f\|_{C_{2\pi}},\quad \|L_n\|=\max\biggl\{\sum_{k=0}^{2n}|l_{k,n}(\varphi)|,\quad \varphi\in[0,2\pi]\biggr\}.\tag{6}$$

На основании интерполяционного оператора (5) рассмотрим квадратурную формулу для функции $f\in C_{2\pi}$

$$\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi\approx\sum_{k=0}^{2n}A_kf(\varphi_k),\quad A_k=\int_0^{2\pi}l_{k,n}(\varphi)\,d\varphi.\tag{7}$$

Лемма 2. *Квадратурная формула (7) обладает следующими свойствами:*
1) она является точной для всякой тригонометрической рациональной функции $r_n \in Q_{n,1}$;
2) ее коэффициенты A_k, $k = \overline{0, 2n}$, *положительны, причем*

$$A_k = \frac{2\pi}{2\Phi_n'(\varphi_k) + 1}, \quad k = \overline{0, 2n};$$

3) выполняется равенство $\sum_{k=0}^{2n} A_k = 2\pi$.

Доказательство. Если $r_n \in Q_{n,1}$, то, согласно лемме 1, $r_n(\varphi) = L_n(\varphi, r_n)$, интегрируя это равенство, найдем

$$\int_0^{2\pi} r_n(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} L_n(\varphi, r_n)\,d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} r_n(\varphi_k) \int_0^{2\pi} l_{k,n}(\varphi)\,d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} A_k r_n(\varphi_k),$$

и, таким образом, первое свойство установлено.

Нам необходимо вычислить интеграл

$$I_k(e^{i\varphi_k}) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Phi_n(\varphi) + \varphi/2)}{\sin((\varphi - \varphi_k)/2)}\,d\varphi = e^{i\varphi_k/2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi)} - e^{-i\Phi_n(\varphi)}}{e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k}}\,d\varphi.$$

С учетом равенства (1) при $|z| < 1$ рассмотрим интеграл

$$\widetilde{I}_k(z) = e^{i\varphi_k/2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi)} - e^{-i\Phi_n(\varphi)}}{e^{i\varphi} - z}\,d\varphi = e^{i\varphi_k/2} \int_0^{2\pi} \frac{\pi_n(e^{i\varphi})e^{i\varphi} - \pi_n(e^{i\varphi})^{-1}}{e^{i\varphi} - z} \frac{de^{i\varphi}}{ie^{i\varphi}} =$$

$$= \frac{e^{i\varphi_k/2}}{i} \int_{|z|=1} \frac{\xi\pi_n(\xi) - \pi_n(\xi)^{-1}}{(\xi - z)\xi}\,d\xi. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что по интегральной формуле Коши $\int_{|z|=1} (\xi - z)^{-1}\pi_n(\xi)\,d\xi = 2\pi i \pi_n(z)$, а функция $((\xi - z)\xi\pi_n(\xi))^{-1}$ не имеет особых точек в области $|\xi| > 1$ и имеет на бесконечности нуль второго порядка, из (8) найдем $\widetilde{I}_k(z) = 2\pi e^{i\varphi_k/2}\pi_n(z)$. Очевидно, что

$$I_k(e^{i\varphi_k}) = \lim_{z \to e^{i\varphi_k}} \widetilde{I}_k(z) = 2\pi e^{i\varphi_k/2}\pi_n(e^{i\varphi_k}) = 2\pi e^{i(\Phi_n(\varphi_k)+\varphi_k/2)} = 2\pi \cos(\Phi_n(\varphi_k) + \varphi_k/2).$$

С учетом этого равенства и соотношений (5) и (7) будем иметь

$$A_k = \frac{\cos(\Phi_n(\varphi_k) + \varphi_k/2)}{2\Phi_n'(\varphi_k) + 1} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Phi_n(\varphi) + \varphi_k/2)}{\sin((\varphi - \varphi_k)/2)}\,d\varphi = \frac{2\pi}{2\Phi_n'(\varphi_k) + 1}, \quad k = \overline{0, 2n},$$

коэффициенты A_k положительны в силу неравенства (2).

Для доказательства свойства 3) достаточно заметить, что $r_n(x) \equiv 1 \in Q_{n,1}$, и в силу точности квадратурной формулы на $Q_{n,1}$ найдем

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Лемма 2 доказана.

Для функции $f \in C_{2\pi}$ определим наилучшее равномерное приближение тригонометрическими рациональными функциями из $Q_{n,1}$ и $Q_{n,2}$, полагая

$$R_n^T(f) = \inf(\|f - r_n\|,\ r_n \in Q_{n,1}), \quad R_{2n}^T(f) = \inf(\|f - r_{2n}\|,\ r_{2n} \in Q_{n,2}).$$

Теорема 1. *Квадратурная формула (7) точна для рациональных функций из множества* $Q_{n,2}$ *и для ее погрешности справедлива оценка*

$$\left| \int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi - \sum_{k=0}^{2n} A_k f(\varphi_k) \right| \le 4\pi R_{2n}^T(f). \tag{9}$$

Доказательство. Покажем, что любую тригонометрическую рациональную функцию $r_{2n} \in Q_{n,2}$ можно представить в виде

$$r_{2n}(\varphi) = \sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right)\frac{p_{n-1/2}(\varphi)}{q_n(\varphi)} + \frac{p_n(\varphi)}{q_n(\varphi)}, \tag{10}$$

где $p_{n-1/2}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка и рациональная функция $p_n(\varphi)/q_n(\varphi)$ принадлежит $Q_{n,1}$.

Действительно, пусть $L_n(\varphi, r_{2n})$ – значение интерполяционного оператора для функции r_{2n}, тогда $L_n(\varphi, r_{2n}) = r_n(\varphi) = p_n(\varphi)/q_n(\varphi)$ и разность $r_{2n}(\varphi) - p_n(\varphi)/q_n(\varphi)$ обращается в нуль в точках $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$, поэтому

$$r_{2n}(\varphi) - \frac{p_n(\varphi)}{q_n(\varphi)} = \sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right)\frac{p_{n-1/2}(\varphi)}{q_n(\varphi)},$$

что равносильно равенству (10).

Покажем теперь, что

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right)\frac{p_{n-1/2}(\varphi)}{q_n(\varphi)}\,d\varphi = 0. \tag{11}$$

Поскольку тригонометрический полином полуцелого порядка можно записать в виде

$$t_{n-1/2}(\varphi) = \sum_{j=1}^{n}(a_j e^{i(j-1/2)\varphi} + b_j e^{-i(j-1/2)\varphi}),$$

то равенство (11) будет следовать из соотношений

$$I_j = \int_0^{2\pi} \sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right)\frac{e^{i(j-1/2)\varphi}}{q_n(\varphi)}\,d\varphi = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{12}$$

которые нужно доказать. Снова используя формулы Эйлера и переходя к комплексным переменным, будем иметь

$$I_j = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}(e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)} - e^{-i(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)})\frac{e^{i(j-1/2)\varphi}}{q_n(\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\frac{\pi_n(e^{i\varphi})e^{i\varphi/2} - \pi_n(e^{i\varphi})^{-1}e^{-i\varphi/2}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(e^{i\varphi} - \alpha_k)(e^{-i\varphi} - \overline{\alpha_k})}\,e^{i(j-1/2)\varphi}\,d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^{n+j-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha_k}\xi)^2}\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^{n+j-2}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)^2}\,d\xi = 0,$$

поскольку в первом интеграле правой части подынтегральная функция аналитична в $|z| \le 1$, а во втором – аналитична в $|\xi| \ge 1$ и в бесконечно удаленной точке имеет нуль второго порядка.

Из равенств (10), (11) и леммы 2 следует, что

$$\int\limits_0^{2\pi} r_{2n}(\varphi)\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{p_n(\varphi)}{q_n(\varphi)}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} r_n(\varphi)\,d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} A_k r_n(\varphi_k) = \sum_{k=0}^{2n} A_k r_{2n}(\varphi_k),$$

т.е. квадратурная формула (7) точна на множестве $Q_{n,2}$, иными словами, формула (7) является квадратурной формулой типа Гаусса.

Пусть $r^*_{2n}(\varphi)$ – тригонометрическая рациональная функция наилучшего приближения для функции $f \in C_{2\pi}$, $r^*_{2n}(\varphi) \in Q_{n,2}$, т.е. выполняется равенство

$$\|f - r^*_{2n}\|_{C_{2\pi}} = R^T_{2n}(f).$$

Для погрешности квадратурной формулы имеем

$$\Big|\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi - \sum_{k=0}^{2n} A_k f(\varphi_k)\Big| = \Big|\int\limits_0^{2\pi}(f(\varphi) - r^*_{2n}(\varphi))\,d\varphi + \sum_{k=0}^{2n} A_k(r^*_{2n}(\varphi_k) - f(\varphi_k))\Big| \le$$

$$\le \int\limits_0^{2\pi}|f(\varphi) - r^*_{2n}(\varphi)|\,d\varphi + \sum_{k=0}^{2n} A_k|r^*_{2n}(\varphi_k) - f(\varphi_k)| \le 4\pi R^T_{2n}(f).$$

Теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что $R^T_n(f) \ge R^T_{2n}(f)$ и неравенство (9) остается справедливым, если в нем заменить $R^T_{2n}(f)$ на $R^T_n(f)$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$x(s) - \lambda\int\limits_0^{2\pi} h(s,t)x(t)\,dt = y(s), \tag{13}$$

где $y(s) \in C_{2\pi}$ – известная функция, ядро $h(s,t)$ имеет период 2π по каждой переменной и непрерывно по совокупности переменных. Как известно, при малых $|\lambda|$ решение уравнения (13) существует, единственно и является непрерывной периодической функцией (см., например, [6, с. 109]). Заменяя интеграл в левой части равенства (13) по квадратурной формуле (7) и требуя выполнения этого равенства только в узловых точках $\{\varphi_j\}_{j=0}^{2n}$, придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$z_j - \lambda\sum_{k=0}^{2n} A_k h(\varphi_j,\varphi_k)z_k = y(\varphi_j),\ j = \overline{0,2n}, \tag{14}$$

решение которой определяет приближенные значения для решения уравнения (13) в узловых точках. Под приближенным решением для всех значений s будем понимать рациональную функцию, определенную через $\{z_k\}_{k=0}^{2n}$ посредством интерполяционного оператора (5):

$$z(s) = \sum_{k=0}^{2n} z_k l_{k,n}(s). \tag{15}$$

Нам удобно также записывать систему (14) в операторной форме

$$\widetilde{K}\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(\varphi_0) \\ y(\varphi_1) \\ \dots \\ y(\varphi_{2n}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \widetilde{K}^{-1}\begin{bmatrix} y(\varphi_0) \\ y(\varphi_1) \\ \dots \\ y(\varphi_{2n}) \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где $\widetilde{K}$ – линейный оператор в пространстве R^{2n+1} и $\widetilde{K}^{-1}$ – соответствующий обратный оператор в том же пространстве.

Интегральное уравнение (13) будем также записывать в операторном виде $Kx = y$, где K – линейный оператор в пространстве $C_{2\pi}$ и $\|K\|$ – его норма как оператора из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$.

Будем предполагать, что ядро $h(s,t)$ можно аппроксимировать рациональными функциями из множества $Q_{n,1}$ по каждой переменной, т.е. существуют функции

$$h_1(s,t) = \frac{1}{q_n(t)}\left(\frac{a_0'(s)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k'(s)\cos kt + b_k'(s)\sin kt\right),$$

$$h_2(s,t) = \frac{1}{q_n(s)}\left(\frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k''(t)\cos ks + b_k''(t)\sin ks\right), \tag{17}$$

с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами, и для этих функций выполнены неравенства

$$|h(s,t) - h_1(s,t)| \le R^T_{\infty,n}(h), \quad |h(s,t) - h_2(s,t)| \le R^T_{n,\infty}(h), \quad 0 \le s,t \le 2\pi. \tag{18}$$

Теорема 2. *Если $x(s)$ – точное решение уравнения (13), для ядра которого выполнены условия (18), и $z(s) \in Q_{n,1}$ – приближенное решение, найденное из уравнений (14), (15), то справедлива оценка*

$$\|x(s) - z(s)\|_{C_{2\pi}} \le (\|L_n\|\|\widetilde{K}^{-1}\|\|K\| + 1)(2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h)\|x\| + R^T_n(y)) +$$

$$+ 4\pi\|L_n\||\lambda|\|\widetilde{K}^{-1}\|R^T_{\infty,n}(h)(R^T_n(y) + \|x\|(1 + 2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h))). \tag{19}$$

Доказательство. Сначала будем аппроксимировать точное решение рациональной функцией

$$\overline{x}(s) = \lambda\int_0^{2\pi} h_2(s,t)x(t)\,dt + \overline{y}(s), \tag{20}$$

где $\overline{y}(s) \in Q_{n,1}$ – рациональная функция наилучшего приближения для $y(s)$, поэтому $\|y(s) - \overline{y}(s)\| = R^T_n(y)$. Вычитая равенство (20) из (13), с учетом условий (18) будем иметь

$$\|x(s) - \overline{x}(s)\|_{C_{2\pi}} = \left\|\lambda\int_0^{2\pi}(h(s,t) - h_2(s,t))x(t)\,dt + y(s) - \overline{y}(s)\right\| \le 2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h)\|x\| + R^T_n(y). \tag{21}$$

Определим теперь рациональную функцию $\widetilde{x}(s)$ своими значениями в узлах $\{\varphi_j\}_{j=0}^{2n}$, полагая с учетом (16), что

$$\begin{bmatrix} \widetilde{x}(\varphi_0) \\ \widetilde{x}(\varphi_1) \\ \dots \\ \widetilde{x}(\varphi_{2n}) \end{bmatrix} = \widetilde{K}^{-1}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{2n} \end{bmatrix}, \quad u_j = \overline{x}(\varphi_j) - \lambda\int_0^{2\pi} h(\varphi_j,t)\overline{x}(t)\,dt, \quad j = \overline{0,2n}. \tag{22}$$

Для рациональной функции $\overline{x}(s)$ ее значения в узлах с учетом соотношений (14) и (16) можно задать в виде

$$\begin{bmatrix}\overline{x}(\varphi_0)\\ \overline{x}(\varphi_1)\\ \dots\\ \overline{x}(\varphi_{2n})\end{bmatrix} = \widetilde{K}^{-1}\begin{bmatrix}v_0\\ v_1\\ \dots\\ v_{2n}\end{bmatrix}, \quad v_j = \overline{x}(\varphi_j) - \lambda\sum_{k=0}^{2n} A_k h(\varphi_j,\varphi_k)\overline{x}(\varphi_k), \quad j=\overline{0,2n}. \tag{23}$$

Вычитая соотношения (23) из (22) и оценивая значения оператора через его норму в R^{2n+1}, приходим к неравенству

$$\max_{0\le j\le 2n}|\overline{x}(\varphi_j)-\widetilde{x}(\varphi_j)| \le \|\widetilde{K}^{-1}\|\max_{0\le j\le 2n}\left|\lambda\int_0^{2\pi} h(\varphi_j,t)\overline{x}(t)\,dt - \lambda\sum_{k=0}^{2n}A_k h(\varphi_j,\varphi_k)\overline{x}(\varphi_k)\right|. \tag{24}$$

Используя ядро $h_1(s,t)$, которое с учетом представления (17) является рациональной функцией по t из множества $Q_{n,1}$, и учитывая, что при всяком s произведение $h_1(s,t)\overline{x}(t)$ есть рациональная функция из $Q_{n,2}$, согласно теореме 1, получаем равенство

$$\int_0^{2\pi} h_1(\varphi_j,t)\overline{x}(t)\,dt = \sum_{k=0}^{2n}A_k h_1(\varphi_j,\varphi_k)\overline{x}(\varphi_k). \tag{25}$$

Из соотношений (24), (25), (18), леммы 2 и неравенства (21) следует, что

$$\max_{0\le j\le 2n}|\overline{x}(\varphi_j)-\widetilde{x}(\varphi_j)| \le$$

$$\le \|\widetilde{K}^{-1}\|\max_{0\le j\le 2n}\left|\lambda\int_0^{2\pi}(h(\varphi_j,t)-h_1(\varphi_j,t))\overline{x}(t)\,dt + \lambda\sum_{k=0}^{2n}A_k(h_1(\varphi_j,\varphi_k)-h(\varphi_j,\varphi_k))\overline{x}(\varphi_k)\right| \le$$

$$\le 4\pi\|\widetilde{K}^{-1}\||\lambda|\|\overline{x}\|R^T_{\infty,n}(h) \le 4\pi\|\widetilde{K}^{-1}\||\lambda|R^T_{\infty,n}(h)(\|x\|(1+2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h))+R^T_n(y)). \tag{26}$$

Тогда, учитывая (6), для равномерной нормы получаем

$$\|\overline{x}(\varphi)-\widetilde{x}(\varphi)\|_{C_{2\pi}} \le 4\pi\|L_n\|\|\widetilde{K}^{-1}\||\lambda|R^T_{\infty,n}(h)(\|x\|(1+2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h))+R^T_n(y)). \tag{27}$$

Если $\{z_j\}_{j=0}^{2n}$ – решение системы (14), то в силу уравнений (13) и (16) будем иметь

$$\begin{bmatrix}z_0\\ z_1\\ \dots\\ z_{2n}\end{bmatrix} = \widetilde{K}^{-1}\begin{bmatrix}y(\varphi_0)\\ y(\varphi_1)\\ \dots\\ y(\varphi_{2n})\end{bmatrix}, \quad y(\varphi_j) = x(\varphi_j) - \lambda\int_0^{2\pi} h(\varphi_j,t)x(t)\,dt, \quad j=\overline{0,2n}, \tag{28}$$

где $x(t)$ – точное решение интегрального уравнения.

Из соотношений (22), (28), (13) и (21) вытекает неравенство

$$\max_{0\le j\le 2n}|\widetilde{x}(\varphi_j)-z_j| \le \|\widetilde{K}^{-1}\|\max_{0\le j\le 2n}\left|\overline{x}(\varphi_j)-x(\varphi_j)+\lambda\int_0^{2\pi}h(\varphi_j,t)(x(t)-\overline{x}(t))\,dt\right| \le$$

$$\le \|\widetilde{K}^{-1}\|\|K\|\|x(s)-\overline{x}(s)\| \le \|\widetilde{K}^{-1}\|\|K\|(2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h)\|x\|+R^T_n(y)),$$

поэтому для равномерной нормы (см. (15)) $\|\widetilde{x}(s) - z(s)\|$ с учетом (6) получим оценку

$$\|\widetilde{x}(s) - z(s)\| \le \|L_n\|\|\widetilde{K}^{-1}\|\|K\|(2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h)\|x\| + R^T_n(y)). \tag{29}$$

Собирая оценки (21), (27) и (29), в итоге будем иметь

$$\|x(s) - z(s)\| \le \|x(s) - \overline{x}(s)\| + \|\overline{x}(s) - \widetilde{x}(s)\| + \|\widetilde{x}(s) - z(s)\| \le$$
$$\le (2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h)\|x\| + R^T_n(y))(1 + \|L_n\|\|\widetilde{K}^{-1}\|\|K\|) +$$
$$+ 4\pi\|L_n\|\|\widetilde{K}^{-1}\||\lambda|R^T_{\infty,n}(h)(\|x\|(1 + 2\pi|\lambda|R^T_{n,\infty}(h)) + R^T_n(y)),$$

что совпадает с оценкой (19).

Замечание. Все величины, входящие в правую часть оценки (19), ограничены, кроме нормы $\|L_n\|$ интерполяционного оператора, которая в ряде важных случаев имеет логарифмический рост по отношению к n. Эта правая часть существенно зависит от параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, которые выбираются в зависимости от свойств ядра $h(s,t)$ и правой части $y(s)$ интегрального уравнения. Если при целых n и положительном α существуют такие наборы $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$, что выполнены соотношения

$$R^T_{\infty,n}(h) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad R^T_{n,\infty}(h) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad R^T_n(y) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то из теоремы 2 немедленно следует, что для погрешности $\|x(s) - z(s)\|_{C_{2\pi}}$ справедлива порядковая оценка

$$\|x(s) - z(s)\|_{C_{2\pi}} = O\left(\frac{\|L_n\|}{n^\alpha}\right).$$

В заключение отметим, что рациональная аппроксимация применялась в работе [7] при оценке погрешности приближенного решения характеристического сингулярного интегрального уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М., 1974.
2. *Турецкий А.Х.* О квадратурных формулах с четным числом узлов, точных для тригонометрических полиномов // Докл. АН БССР. 1960. Т. 4. № 9. С. 365.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
4. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск, 1968.
5. *Коровкин П.П.* Линейные операторы и теория приближений. М., 1959.
6. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.; М., 1941.
7. *Митенков В.И., Русак В.Н.* Оценка погрешности одной аппроксимации характеристического сингулярного интегрального уравнения // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 410–414.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Белорусский государственный педагогический
университет им. М. Танка, г. Минск

Поступила в редакцию
16.03.2011 г.