

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕЙЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение. Рассмотрим функции, представимые в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r^\alpha(x-\tau)h(\tau)d\tau, \quad r > 0, \quad -\infty < \alpha < \infty, \quad (1)$$

функции h с ядром Вейля

$$D_r^\alpha(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(k\tau - \frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Если r натуральное и $\alpha = r$, то функция h является r -й производной по отношению к f . При дробных $r = \alpha$ функцию h также принято называть производной порядка r по отношению к f . При различных предположениях относительно h для функций (1) были найдены точные оценки наилучших полиномиальных и рациональных приближений (см., например, [1-5]).

Пусть h – функция ограниченной вариации на отрезке $[0, 2\pi]$, $\text{Var}(h(\tau), [0, 2\pi]) \leq 1$. Через $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ обозначим класс функций, определенных формулой (1), через $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$ – класс функций, представимых интегралом Стильтеса

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_{r+1}^{\alpha+1}(x-\tau)dh(\tau), \quad r > 0, \quad -\infty < \alpha < \infty. \quad (2)$$

В частности, при $\alpha = r$ формулы (1) и (2) определяют свертки ядра Вейля с функциями ограниченной вариации, если $\alpha = r+1$, получаем свертки сопряженных ядер Вейля с функциями ограниченной вариации.

Соответствующие классы называем $W_{2\pi}^rV$, $W_{2\pi}^rV_0$, $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ и $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$. Через K^r в дальнейшем обозначаем один из классов $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$, $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, $W_{2\pi}^rV$, $W_{2\pi}^rV_0$, $W_{2\pi}^rV$, $W_{2\pi}^rV_0$, через $C_j = C_j(r)$ – положительные константы, которые могут зависеть только от r . Константы, скрывающиеся за символом O , также зависят лишь от r . Под записью $\varphi(x) \asymp \psi(x)$ будем понимать, что отношение $\varphi(x)/\psi(x)$ ограничено сверху и снизу некоторыми положительными константами.

Точный порядок наилучших рациональных приближений на классах K^r был найден В. Н. Русаком в работе [4]

$$\sup_{f \in K_p^r} R_n^r(f) \asymp \frac{1}{n^{r+1}}.$$

Как известно из [4], функция $D_r^\alpha(\tau)$ аналитически продолжима с отрезка $[0, 2\pi]$ во всю полосу $\Omega = \{z \mid 0 \leq \text{Re } z \leq 2\pi\}$, за исключением, может быть, точек $z=0$ и $z=2\pi$. Поэтому $D_{r,n}^\alpha(\tau)$ – остаток ряда Фурье ядра $D_r^\alpha(\tau)$,

$$D_{r,n}^\alpha(z) = D_r^\alpha(z) - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kz - \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

также является аналитической в полосе Ω функцией, причем при $z \in \Omega$, $t, \tau \in R$ и любом действительном α имеют место доказанные в [4] соотношения

$$|D_{r+1,n}^\alpha(z)| = O\left(\frac{e^{n|\operatorname{Im}z|}}{n^r}\right), r > 0, -\infty < \alpha < \infty \quad (3)$$

$$|D_{r+1,n}^{\alpha+1}(t) - D_{r+1,n}^{\alpha+1}(\tau)| \leq \begin{cases} O\left(|\sin((t-\tau)/2)|^r\right), 0 < r < 1, \\ O\left(|\sin((t-\tau)/2)| \left|\ln|\sin((t-\tau)/2)|\right|\right), r = 1, \\ O\left(|\sin((t-\tau)/2)|/n^{r-1}\right), r > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Сумматорные рациональные операторы типа Лагранжа и их свойства. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $0 \leq |\alpha_k| < 1$ – заданная последовательность комплексных чисел, кроме того, еще n чисел взяты равными нулю. Через

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{2n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z} = z^n \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z} \quad (5)$$

обозначим произведение Бляшке по этой системе параметров. Поскольку $|\pi_n(z)| = 1$ на единичной окружности, то выполняется равенство

$$\pi_n(e^{iu}) = e^{i\Phi_n(u)},$$

где $\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu})$, $0 \leq \Phi_n(0) = \arg \prod_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}} < 2\pi$.

Пользуясь равенством (5), нетрудно проверить, что

$$\Phi_n'(u) = n + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(e^{iu} - \alpha_k)(e^{-iu} - \overline{\alpha_k})} = n + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - |\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u - \arg \alpha_k}{2}}. \quad (6)$$

Следовательно, при изменении u от 0 до 2π аргумент $\Phi_n(u) + u/2$ возрастает от $\Phi_n(0)$ до $\Phi_n(0) + (4n+1)\pi$, соответственно $\sin(\Phi_n(u) + u/2)$ имеет нули в точках $\{u_j\}$,

$$0 \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{4n} < 2\pi,$$

при этом имеют место равенства

$$\Phi_n(u_{j+1}) + u_{j+1}/2 - \Phi_n(u_j) - u_j/2 = \pi, j = \overline{0, 4n-1}. \quad (7)$$

Будем обозначать через Q_n множество $\{p_{2n}(x)/q_n(x)\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше $2n$ с фиксированным знаменателем $q_n(x) = \prod_{k=1}^n (e^{ix} - \alpha_k)(e^{-ix} - \overline{\alpha_k})$. Для любой

функции $f(u)$ из пространства $C_{2\pi}$ непрерывных 2π -периодических функций построим интерполяционный рациональный оператор L_{2n} (впервые он был введен в работе [6], но имел несколько иную конструкцию), полагая

$$L_{2n}(u, f) = \sum_{j=0}^{4n} f(u_j) l_{j,n}(u), \quad l_{j,n}(u) = \frac{\sin\left(\Phi_n(u) + \frac{u}{2}\right) \cos\left(\Phi_n(u_j) + \frac{u_j}{2}\right)}{(1 + 2\Phi'_n(u_j)) \sin \frac{u - u_j}{2}}. \quad (8)$$

Лемма 1. Введенный равенством (8) оператор L_{2n}

- 1) любую функцию $f \in C_{2\pi}$ отображает в тригонометрическую рациональную функцию из Q_n ;
- 2) удовлетворяет условиям $L_{2n}(u_j, f) = f(u_j)$, $j = \overline{0, 4n}$;
- 3) является точным на множестве Q_n .

Утверждения леммы верны в силу справедливости аналогичной леммы из работы [6].

Следствие 1. Оператор L_{2n} точен на тригонометрических многочленах степени не выше n .

Действительно, любой тригонометрический многочлен степени не выше n входит в Q_n .

Леммы о расположении полюсов. Через ρ обозначаем число, равное $\rho = \rho(N) = \exp(-1/\sqrt{N})$. Число N будет определено далее.

Лемма 2. Если на каждом из t лучей $\arg z = \tau_j$, $j = \overline{1, t}$ расположено N параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ по правилу $\alpha_k = (1 - \rho^k) e^{i\tau_j}$, то при $|u - v| \leq \pi / \Phi'_n(u)$ ограничено отношение

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\Phi'_n(u)}{\Phi'_n(v)} \leq 3.$$

Доказательство леммы 2 можно найти в [7].

Лемма 3. Пусть из n параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ Nt расположены так, как в лемме 2 при условии $N \geq C_1 \ln^2 n$, $t \leq n/N$, а остальные $n - Nt$ равны нулю. Тогда для нормы оператора L_{2n} верно неравенство

$$\|L_{2n}\| = \max \left\{ \sum_{j=0}^{4n} |l_{j,n}(u)| \mid u \in [0, 2\pi] \right\} = O(\ln n).$$

Доказательство. Так как лучи, на которых находятся параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{mN}$, могут располагаться произвольным образом, то без ограничения общности будем считать, что $u = \pi$. Пусть s – такой номер, что $u \in [u_s, u_{s+1}]$. Оцениваем сумму представим в виде

$$\sum_{j=0}^{4n} |l_{j,n}(u)| = \sum_{j=0}^{s-2} |l_{j,n}(u)| + \sum_{j=s-1}^{s+2} |l_{j,n}(u)| + \sum_{j=s+3}^{4n} |l_{j,n}(u)| = S_1 + S_2 + S_3.$$

Начнем с суммы S_2 . С учетом теоремы Лагранжа и леммы 2 будем иметь

$$\begin{aligned} |l_{s,n}(u)| &\leq \frac{\left| \sin\left(\Phi_n(u) + \frac{u}{2}\right) - \sin\left(\Phi_n(u_j) + \frac{u_j}{2}\right) \right|}{(1 + 2\Phi'_n(u_j)) \left| \sin \frac{u-u_j}{2} \right|} = \frac{\left| \left(\sin\left(\Phi_n(\xi) + \frac{\xi}{2}\right) \right)' \right| |u-u_j|}{(1 + 2\Phi'_n(u_j)) \left| \sin \frac{u-u_j}{2} \right|} \leq \\ &\leq \frac{(1 + 2\Phi'_n(\xi)) \left| \frac{u-u_j}{2} \right|}{(1 + 2\Phi'_n(u_j)) \left| \sin \frac{u-u_j}{2} \right|} \leq 3 \frac{\left| \frac{u-u_j}{2} \right|}{\left| \sin \frac{u-u_j}{2} \right|} < 4, \\ |l_{s-1,n}(u)| &\leq \frac{(1 + 2\Phi'_n(\zeta)) \left| \frac{u-u_j}{2} \right|}{(1 + 2\Phi'_n(u_j)) \left| \sin \frac{u-u_j}{2} \right|} \leq 9 \frac{\left| \frac{u-u_j}{2} \right|}{\left| \sin \frac{u-u_j}{2} \right|} < 10, \end{aligned}$$

где $\xi \in [u_s, u]$, $\zeta \in [u_{s-1}, u]$. Для слагаемых $|l_{s,n}(u)|$ и $|l_{s+1,n}(u)|$ будут верны такие же оценки, поэтому заключаем

$$S_2 < 28. \quad (9)$$

Из (6) при любом x получаем

$$\begin{aligned} \Phi'_n(x) &\leq 2n - mN + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - |\alpha_k|)^2} = 2n - mN + m \sum_{k=1}^N \frac{1 + |\alpha_k|}{1 - |\alpha_k|} \leq 2n - mN + 2m \sum_{k=1}^N \frac{1}{\rho^k} = \\ &= 2n - mN + 2m \frac{\rho^{-N} - 1}{1 - \rho} \leq n + 3m \frac{\sqrt{N}}{\rho^N} \leq 2n - mN + \frac{3n}{\sqrt{N} e^{-\sqrt{N}}} \leq n e^{\sqrt{N}} = n^{\sqrt{C_1+1}} =: \frac{1}{d_n}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $u - u_{s-1} > d_n$, $u_{s+2} - u > d_n$. Действительно, из (7) следует соотношение

$$\int_{u_j}^{u_{j+1}} \Phi'_n(t) dt = \Phi_n(u_{j+1}) - \Phi_n(u_j) = \pi - (u_{j+1} - u_j)/2 > 3,$$

но

$$\int_{u-d_n}^{u+d_n} \Phi'_n(t) dt \leq \frac{2d_n}{d_n} = 2,$$

поэтому на отрезке $[u - d_n, u + d_n]$ не может находиться более одной точки u_j .

Снова используя теорему Лагранжа и лемму 2, для сумм S_1 и S_3 будем иметь

$$S_1 + S_3 \leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{s-2} \frac{\Phi'_n(\xi_j)(u_{j+1} - u_j)}{(1 + 2\Phi'_n(u_j)) \left| \sin \frac{u - u_j}{2} \right|} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=s+2}^{4n} \frac{\Phi'_n(\xi_j)(u_j - u_{j-1})}{(1 + 2\Phi'_n(u_j)) \left| \sin \frac{u - u_j}{2} \right|} \leq$$

$$\leq 6 \int_{d_n}^{\pi} \frac{dx}{x} = 6 \ln \frac{\pi}{d_n} = O(\ln n),$$

откуда с учетом (9) следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{mN}$ расположены так, как в лемме 2,

τ_k и τ_{k+1} – аргументы соседних лучей, $\tau_{k+1} - \tau_k \leq \frac{2\pi}{3}$, $\tau \notin [\tau_k, \tau_{k+1}]$,

$N \geq \left(3 \frac{2r+1}{r} \ln n \right)^2$, $\left| \sin \frac{u - \tau_{k+1}}{2} \right| > n^{-\frac{r+1}{r}}$, тогда справедливы соотношения

$$\left| \sum_{\tau_k \leq u_j < \tau_{k+1}} (D_{r+1,n}^\alpha(u - \tau) - D_{r+1,n}^\alpha(u_j - \tau)) l_{j,n}(u) \right| = \begin{cases} O\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{r+1}{r}}}\right), & \left| \sin \frac{u - \tau_k}{2} \right| \leq n^{-\frac{r+1}{r}}, \\ O\left(\frac{1}{n^{\frac{r+2}{r}}}\right), & \left| \sin \frac{u - \tau_k}{2} \right| \geq n^{-\frac{r+1}{r}}. \end{cases}$$

Лемма доказывается по схеме, используемой в [8] при доказательстве подобной леммы.

Оценки уклонений рациональных операторов в равномерной метрике.

Теорема. Если функция $f(u) \in K^r$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ справедлива оценка

$$\|L_{2n}(u, f) - f(u)\| = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для функций классов $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ и $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$. Начнем со случая $f(u) \in W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, $0 < r < 1$. Не ограничивая общность, в дальнейшем будем считать, что $h(\tau)$ – непрерывная слева функция ограниченной вариации.

Определим число b равенством $b = 2 \left(3 \frac{2r+1}{r} \right)^2$ и будем полагать, что $n \geq 3b \ln^2 n$. Сделаем разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ точками $\tau_k, k = \overline{1, m+1}$, по правилу

$$0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m+1} = 2\pi,$$

$$\tau_{k+1} = \max \left\{ \tau : \tau_k < \tau \leq 2\pi, \tau - \tau_k \leq 2\pi/3, \text{Var}(h, (\tau_k, \tau)) \leq \frac{b \ln^2 n}{n} \right\}. \quad (10)$$

Понятно, что число точек разбиения не превосходит

$$\left[\frac{n}{b \ln^2 n} \right] + 4.$$

Разместим по $N = \left[1/2b \ln^2 n + 1 \right]$ параметров α_k на каждом радиальном луче $\arg \theta = \tau_l, l = \overline{1, m}$ в точках

$$(1 - \rho^k) e^{i\tau_l}, k = \overline{1, N}.$$

Общее количество задействованных параметров (без учета тех n параметров, которые равны нулю), не превосходит n . Действительно,

$$mN = \left[\frac{n}{b \ln^2 n} + 4 \right] \left[1/2b \ln^2 n + 1 \right] \leq n.$$

Остальные $n - mN$ параметров можно взять равными нулю.

Через Δ_k будем обозначать отрезок $[\tau_k, \tau_{k+1}]$. На основании леммы 1, следствия 1 и представления (2) запишем уклонение значения оператора V_{4n-1} от функции $f(u)$ в форме

$$\begin{aligned} f(u) - L_{2n}(u, f) &= \sum_{j=0}^{4n} (f(u) - f(u_j)) l_{j,n}(u) = \\ &= \sum_{j=0}^{4n} \int_0^{2\pi} (D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u - \tau) - D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j - \tau)) dh(\tau) l_{j,n}(u) = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{\tau_k \leq u_j < \tau_{k+1}} \left(\int_{\Delta_k} + \int_{[0, 2\pi] \setminus \Delta_k} \right) (D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u - \tau) - D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j - \tau)) dh(\tau) l_{j,n}(u) = S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (3), (10) и леммы 3 для суммы S_1 будем иметь

$$|S_1| \leq \frac{C_{11}}{n^r} \sum_{k=1}^m \sum_{\tau_k \leq u_j < \tau_{k+1}} \int_{\Delta_k} |dh(\tau)| |l_{j,n}(u)| \leq \frac{C_{11}}{n^r} \frac{b \ln^2 n}{n} \sum_{j=0}^{4n} |l_{j,n}(u)| = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right). \quad (12)$$

Для точки u , в которой производится оценка уклонения, определим окрестность

$$\delta_n(u) = \left\{ x \mid 0 \leq x \leq 2\pi, \left| \sin \frac{u-x}{2} \right| \leq n^{-\frac{r+1}{r}} \right\},$$

состоящую из одного или двух отрезков. Пусть $S_2 = S_{21} + S_{22} + S_{23}$, где S_{21} берется по отрезкам Δ_k , полностью принадлежащим $\delta_n(u)$, S_{23} – по отрезкам, не имеющим общих внутренних точек с $\delta_n(u)$. Принимая во внимание лемму 3 и соотношения (3) и (10), для S_{21} находим

$$\begin{aligned} |S_{21}| &\leq \sum_k \sum_{\tau_k \leq u_j < \tau_{k+1}} \int_{[0, 2\pi] \setminus \Delta_k} |D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u - \tau) - D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j - \tau)| |dh(\tau)| |l_{j,n}(u)| \leq \\ &\leq \frac{C_{12}}{n^{r+1}} \sum_k \sum_{\tau_k \leq u_j < \tau_{k+1}} |l_{j,n}(u)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Для оценки S_3^μ будем использовать лемму 4

$$|S_{23}| \leq \sum_k \int_{[0, 2\pi] \setminus \Delta_k} \left| \sum_{\tau_k \leq u_j < \tau_{k+1}} \left((D_{r+1, n}^{\alpha+1}(u - \tau) - D_{r+1, n}^{\alpha+1}(u_j - \tau)) l_{j, n}(u) \right) \right| |dh(\tau)| \leq \quad (14)$$

$$\leq \frac{C_{13} m}{n^{r+2}} = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Ясно, что в сумму S_{22} входит не более двух слагаемых, поэтому при ее оценке с учетом леммы 4 будем иметь

$$|S_{22}| \leq \sum_k \int_{[0, 2\pi] \setminus \Delta_k} \left| \sum_{\tau_k \leq u_j < \tau_{k+1}} \left((D_{r+1, n}^{\alpha+1}(u - \tau) - D_{r+1, n}^{\alpha+1}(u_j - \tau)) l_{j, n}(u) \right) \right| |dh(\tau)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right). \quad (15)$$

Собирая соотношения (11)–(15), окончательно получим

$$|f(u) - L_{2n}(u, f)| = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right).$$

Таким образом, для случая $f(u) \in W_{2\pi}^{r, \alpha} V_0$, $0 < r < 1$ теорема доказана.

Если $f(u) \in W_{2\pi}^{r, \alpha} V$, то после интегрирования по частям будем иметь

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r^\alpha(x - \tau) h(\tau) d\tau = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} D_{r+1}^{\alpha+1}(x) (h(0) - h(2\pi)) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_{r+1}^{\alpha+1}(x - \tau) h(\tau) d\tau = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ состоит из первых двух слагаемых, а $f_2(x)$ образована третьим слагаемым и, очевидно, принадлежит классу $W_{2\pi}^{r, \alpha} V_0$. Для данной функции $h(\tau)$ и $0 < r < 1$ расположим параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ так же, как и раньше. В силу доказанного имеет место соотношение

$$\|L_{2n} - f_2(u)\| = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right).$$

Уклонение $|L_{2n} - f_1(u)|$ оценивается точно так же, как сумма S_2 , отсюда получаем

$$\|L_{2n} - f_1(u)\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right),$$

и, следовательно,

$$\|L_{2n} - f(u)\| = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right).$$

При $r \geq 1$ общая схема оценки уклонения остается такой же, но в деталях доказательство несколько упрощается благодаря большей гладкости функции $f(u)$.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что при указанном расположении параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^{2n}$ уклонение операторов L_{2n} на рассмотренном функциональном классе

существенно меньше, чем наилучшие полиномиальные приближения, имеющие порядок $1/n^r$, и лишь логарифмическим множителем по порядку отличается от наилучших рациональных приближений.

Отметим в заключение, что в работе [8] Е.А. Ровбой использовались схожие по конструкции операторы для приближения непериодических функций с дробной производной в смысле Римана–Лиувилля ограниченной вариации. Полученное уклонение имело такой же порядок, что и в настоящей работе.

Литература

1. Дзядык, В. К. К вопросу о наилучшем тригонометрическом приближении кратно монотонных функций в метрике / В. К. Дзядык // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – М., 1961. – С. 72–82.
2. Стечкин, С. Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – № 20. – С. 643–648.
3. Теляковский, С. А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними из рядов Фурье / С. А. Теляковский // Тр. ММО. – 1961. – Т. 52. – С. 61–97.
4. Русак, В. Н. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки / В. Н. Русак // Матем. сб. – 1985. – Т. 128. – № 4. – С. 492–515.
5. Старовойтов, А. П. Рациональные приближения интегралов Римана–Лиувилля и Вейля / А. П. Старовойтов // Матем. заметки. – 2005. – Т. 87. – № 3. – С. 428–441.
6. Русак, В. Н. Рациональная интерполяция и квадратурные формулы для периодических функций / В. Н. Русак, Н. В. Гриб // Вестник БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2011. – № 2. – С. 102–106.
7. Русак, В. М. Аб адным спосабе інтэрпаляцыі рацыянальнымі функцыямі / В. М. Русак, Т. С. Мардвілка // Весці БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2006. – № 2. – С. 13–15.
8. Ровба, Е. А. Рациональная интерполяция дифференцируемых функций с r -й производной ограниченной вариации / Е. А. Ровба // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53. – № 2. – С. 114–121.