К вопросу о сходимости рациональных операторов Фурье с равноотстоящими полюсами

Пусть $\{\alpha_k\}$, $|\alpha_k|<1$, $k=0,1,2...$ – произвольная последовательность комплексных чисел. Как впервые показали Такенака [1] и Малмквист [2], система рациональных функций

$$\varphi_0(z)=\left(\frac{1-|\alpha_0|^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_0 z},\ \ \varphi_n(z)=\left(\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_n}{1-\bar{\alpha}_n z},\ \ n=1,2,...$$

ортонормированна на единичной окружности $|z|=1$.

В работе [5] составлен рациональный оператор по такой системе:

$$S_{n,m}(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_{n,m}(t,x)dt\,,$$

где $K_{n,m}(t,x)$ – ядро оператора,

$$K_{n,m}(t,x)=\frac{1}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}e^{\frac{i}{2}\left[\int_t^x\sum_{k=0}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du-\int_t^x\sum_{k=1}^{m}\frac{|\beta_k|^2-1}{1-2|\beta_k|\cos(u-\omega_k)+|\beta_k|^2}du\right]-\frac{i}{2}(x-t)}\times$$

$$\times\sin\left\{\frac{1}{2}\left[\int_t^x\sum_{k=0}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du-\int_t^x\sum_{k=1}^{m}\frac{|\beta_k|^2-1}{1-2|\beta_k|\cos(u-\omega_k)+|\beta_k|^2}du\right]\right\},$$

а $\{\beta_m\}$, $|\beta_m|>1$, $m=1,2,...$– произвольная последовательность комплексных чисел.

Доказана сходимость таких операторов к функциям из $L_1(-\pi,\pi)$ в случае, когда α_k и β_k не имеют предельных точек на единичной окружности.

Будем рассматривать последовательность равноотстоящих на окружности комплексных чисел

$$\{\alpha_k\}_0^n,\ \alpha_0=0,\ \alpha_k=q_n e^{i\frac{2\pi k}{n}}=q_n\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$
$$k=\overline{1,n},\quad n=\overline{2,\infty},\quad 0<q_n<1,\ \lim_{n\to\infty} nq_n^n=0. \tag{1}$$

Как видно, если $\lim_{n\to\infty} q_n=1$, то данная последовательность имеет предельные точки на единичной окружности.

Пусть $\theta_k = \arg\alpha_k = i\frac{2\pi k}{n}$, $\omega_k = \arg\beta_k$.

Положим $\beta_k = \frac{1}{\bar{\alpha}_k}$ $(k>0)$, тогда

$$\omega_k = \arg\beta_k = \arg\frac{1}{\bar{\alpha}_k} = \arg\frac{\alpha_k}{\bar{\alpha}_k\alpha_k} = \arg\frac{\alpha_k}{|\alpha_k|^2} = \arg\alpha_k = \theta_k,$$

и при $m=n$ для $K_{n,m}(t,x)$ можно найти

$$K_{n,m}(t,x) = \frac{1}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}\sin\left\{\int_t^x\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}\right]du\right\} \overset{def}{=} K_n(t,x).$$

Обозначим

$$\sigma(u) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}.$$

Можно показать, что $\sigma(u)$ имеет вид

$$\sigma(u) = \frac{1}{2}+n\frac{1-q_n^n}{1-2q_n^n\cos nu+q_n^{2n}}.$$

Тогда

$$K_n(t,x) = \frac{1}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}\sin\int_t^x\sigma(u)du, \qquad (2)$$

$$S_{n,m}(x,f) \overset{def}{=} S_n(x,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(t,x)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}\sin\int_t^x\sigma(u)dudt. \qquad (3)$$

Нам понадобится ряд лемм, большинство из них приведем без доказательства.

Лемма 1. *Если* $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$ *и* $f(x+2\pi)=f(x), -\infty<x<+\infty$, *то при любом* $-\pi<x<+\pi$ *справедлива формула*

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x-y)\frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{2\sin\frac{y}{2}}dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+y)\frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{2\sin\frac{y}{2}}dy, \qquad (4)$$

где

$$y\lambda_n(y,x)=\int_x^{x+y}\sigma(u)du\,. \tag{5}$$

Лемма 2. *Справедливы оценки*

$$c_1 n\le\left|\lambda_n(\pm y,x)\right|\le c_2 n \tag{6}$$

$$c_1 n\le\left|\left[y\lambda_n(\pm y,x)\right]_y^{'}\right|\le c_2 n \tag{7}$$

$$\left|\left[y\lambda_n(\pm y,x)\right]_{y^2}^{''}\right|\le c_3 n^2 q_n^n \tag{8}$$

Доказательство. Докажем справедливость оценок для $\lambda_n(+y,x)$, для $\lambda_n(-y,x)$ доказательство аналогично.

Из (5) имеем

$$\lambda_n(y,x)=\frac{1}{y}\int_x^{x+y}\sigma(u)du=\frac{1}{y}\sigma(\xi)y=\sigma(\xi)\,,$$

где $\xi\in(x,x+y)$.

Оценим $\sigma(u)$ снизу:

$$\sigma(u)=\frac{1}{2}+n\frac{1-q_n^{2n}}{1-2q_n^n\cos nu+q_n^{2n}}\ge n\frac{1-q_n^{2n}}{\left(1+q_n^n\right)^2}=n\frac{1-q_n^n}{1+q_n^n}\ge c_1(q_n)n. \tag{9}$$

Оценка сверху:

$$\sigma(u)=\frac{1}{2}+n\frac{1-q^{2n}}{1-2q^n\cos nu+q^{2n}}\le\frac{1}{2}+n\frac{1-q^{2n}}{\left(1-q^n\right)^2}=\frac{1}{2}+n\frac{1+q^n}{1-q^n}\le c_2(q_n)n. \tag{10}$$

Отсюда следует формула (6).

Так как

$$\left|\left[y\lambda_n(y,x)\right]_y^{'}\right|=\left|\left[\int_x^{x+y}\sigma(u)du\right]_y^{'}\right|=\left|\sigma(x+y)\right|,$$

то из (9) и (10) следует формула (7).

Оценим вторую производную:

$$\left|\left[y\lambda_n(y,x)\right]''_{y^2}\right| = \left|\left[\sigma(x+y)\right]'_y\right| = \left|\left[n\frac{1-q_n^{2n}}{1-2q_n^n\cos nu+q_n^{2n}}\right]'_y\right| =$$

$$= \left|-2n^2\frac{(1-q_n^{2n})q_n^n\sin\left[(x+y)n\right]}{\left(1-2q_n^n\cos\left[(x+y)n\right]+q_n^{2n}\right)^2}\right| \le \frac{2n^2q_n^n}{\left(1-q_n^n\right)^4} \le c_3(q_n)n^2q_n^n. \qquad (11)$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $\varphi(y)\in L_1(0,\pi)$, *то при любом* $-\infty < x < +\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\varphi(y)e^{iy\lambda_n(\pm y,x)}dy = 0,$$

при этом равномерно относительно x.

Лемма 4. *Если* $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$ *и* $f(x+2\pi)=f(x), -\infty<x<+\infty$, *то при любом* $-\pi < x < +\pi$ *и при любом* ω, $0<\omega<\pi$ *справедлива формула*

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega} f(x-y)\frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{y}dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega} f(x+y)\frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{y}dy + o(1),$$

где $o(1)\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Лемма 5. *Справедливы оценки*

$$\left|\left[\lambda_n(\pm y,x)\right]'_y\right| \le c_4n^2q_n^n \qquad (12)$$

$$\left|\left[\lambda_n(\pm y,x)\right]''_{y^2}\right| \le c_5n^3q_n^n \qquad (13)$$

Лемма 6. *Для любого* $\delta>0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y,x)]}{y}dy = \frac{\pi}{2},$$

при этом равномерно относительно x $(-\infty<x<+\infty)$.

Лемма 7. *Если функция* $g(y)$ *монотонно возрастает в промежутке* $[0,h]$, $h>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{h} g(y)\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y,x)]}{y}dy = \frac{\pi}{2}g(+0).$$

Теорема 1. *Если функция* $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$ *и в некоторой окрестности* (x_0-h,x_0+h) *точки* x_0 *имеет ограниченную вариацию, то*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0,f)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}. \qquad (14)$$

Доказательство. Выберем в формуле (10) леммы 3 число $\omega=h$, тогда для точки $x=x_0$ при $n\to\infty$ она примет вид

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^h f(x_0-y)\frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{y}dy+\frac{1}{\pi}\int_0^h f(x_0+y)\frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{y}dy+o(1).$$

Но функции $f(x_0-y)$ и $f(x_0+y)$ в отрезке $[0,h]$ имеют ограниченную вариацию, значит, каждая из них представляется в виде разности двух монотонно возрастающих функций. Тогда лемма 7 приложима к каждой из них в отдельности, и , следовательно, к их разности, откуда заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0,f)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Таким образом, в точках непрерывности будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0,f)=f(x_0).$$

Теорема 2. *Пусть* $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$ *и в точке* x_0 *существуют предельные значения* $f(x_0-y)$ *и* $f(x_0+y)$. *Если для функций*

$$\varphi_1(y)=f(x_0-y)-f(x_0-0),\ \ \varphi_2(y)=f(x_0+y)-f(x_0+0) \qquad (15)$$

существуют интегралы

$$\int_0^\omega \frac{|\varphi_1(y)|}{y}dy,\quad \int_0^\omega \frac{|\varphi_2(y)|}{y}dy, \qquad (16)$$

то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0,f)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Доказательство. По формуле (10) леммы 3 при $n\to\infty$ имеем:

$$S_n(x_0,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^\omega f(x_0-y)\frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{y}dy+\frac{1}{\pi}\int_0^\omega f(x_0+y)\frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{y}dy+o(1).$$

(17)

С другой стороны, по теореме 1 имеем

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega} f(x_0-y)\frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{y}dy+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega} f(x_0+y)\frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{y}dy+o(1). \tag{18}$$

Из (17) и (18) в силу (15) имеем

$$S_n(x_0,f)-\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega}\frac{\varphi_1(y)}{y}\sin[y\lambda_n(-y,x)]dy+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega}\frac{\varphi_2(y)}{y}\sin[y\lambda_n(y,x)]dy+o(1),\ \ n\to\infty,$$

откуда, ввиду сходимости интегралов (16) по лемме 4, следует утверждение теоремы.

Пусть

$$R_n(f)=\inf_{p_n(z)}\left\|f(x)-\frac{p_n(x)}{1-q^nx^n}\right\|, \tag{19}$$

есть наилучшее приближение функций $f(x)\in C(L)$ функциями вида $r_n(x)=\frac{p_n(x)}{1-q^nx^n}$, а $r_n^*(x)=\frac{p_n^*(x)}{1-q^nx^n}$ – рациональная функция, которая реализует инфинум в (19). Тогда имеет место

Теорема 3. *Если* $f(x)\in C_{2\pi}$, *то справедлива оценка*

$$\|S_n(x,f)-f(x)\|=O(\ln n R_n(f)).$$

Доказательство. Норма оператора

$$S_n(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}\sin\int_t^x\sigma(u)du dt$$

как оператора из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ равна

$$\|S_n\|=\max_x\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\left|\frac{\sin\int_x^t\sigma(u)du}{\sin\frac{t-x}{2}}\right|dt. \tag{20}$$

Учитывая лемму 2 а также неравенства $|\sin z|\le|z|$ и $|\sin z|\ge 2|z|/\pi$ при $|z|\le\pi/2$, получим из (20)

$$\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi}\left|\frac{\sin\int\limits_x^t \sigma(u)du}{\sin\frac{t-x}{2}}\right|dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\int\limits_x^{x+z}\sigma(u)du}{\sin\frac{z}{2}}\right|dz=\int\limits_{|z|\le\pi/n}\frac{\left|\sin\int\limits_x^{x+z}\sigma(u)du\right|}{\left|\sin\frac{z}{2}\right|}dz+$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|z|\le\pi}\frac{\left|\sin\int\limits_x^{x+z}\sigma(u)du\right|}{\left|\sin\frac{z}{2}\right|}dz=I_1+I_2.$$

$$I_1=\int\limits_{|z|\le\pi/n}\frac{\left|\sin\int\limits_x^{x+z}\sigma(u)du\right|}{\left|\sin\frac{z}{2}\right|}dz\le\int\limits_{|z|\le\pi/n}\frac{\left|\int\limits_x^{x+z}\sigma(u)du\right|}{\left|\sin\frac{z}{2}\right|}dz\le\int\limits_{|z|\le\pi/n}\frac{|z||\sigma(u)|}{\frac{2}{\pi}\frac{|z|}{2}}dz=2\pi c_2 n\frac{\pi}{n}=2\pi^2 c_2.$$

$$I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|z|\le\pi}\frac{\left|\sin\int\limits_x^{x+z}\sigma(u)du\right|}{\left|\sin\frac{z}{2}\right|}dz\le\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|z|\le\pi}\frac{1}{\left|\sin\frac{z}{2}\right|}dz\le\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|z|\le\pi}\frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{|z|}{2}}dz=2\pi\ln z\Big|_{\pi/n}^{\pi}=2\pi\ln n.$$

Поэтому

$$\|S_n\|=\frac{1}{2\pi}\left(2\pi^2c_2+2\pi\ln n\right)=\pi c_2+\ln n=O(\ln n).$$

Тогда

$$\|f(x)-S_n(x,f)\|=\|f(x)-r_n^*(x)+r_n^*(x)-S_n(x,f)\|\le\|f(x)-r_n^*(x)\|+$$
$$+\|r_n^*(x)-S_n(x,f)\|=R_n(f)+\|S_n(x,r_n)-S_n(x,f)\|=R_n(f)+$$
$$+\|S_n(x,r_n^*-f)\|\le R_n(f)+\|S_n\|\cdot\|r_n^*(x)-f(z)\|=R_n(f)(1+\|S_n\|)=$$
$$=O(\ln n R_n(f)).$$

Литература

1. Takenaka S. On the orthogonal function and a new formula of interpolation// Japanese Joural of Mathematics, P. 129–145.
2. Malmquist F. Sur la determination d'une classe de functions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donne de points // Comptes rendus du sixieme congres des mathematicians scandinaves. Kopenhagen, 1925. P. 253–259.
3. Уолш Дж.Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области / Дж. Л. Уолш – Москва, ИЛ, 1961, 498 с.
4. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
5. Джрбашян М.М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1956. Т. 9. №7. С. 3–28.
6. Ровба Е.А. О приближении рациональными операторами типа Фурье и Вале-Пуссена функций с производной ограниченной вариации /Е.А. Ровба – Праці Інстітуту НАН Украины. 1998. т20. – с. 204–217.
7. Ровба Е.А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.