УДК 517.53

Н.В. ГРИБ

О РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВЕЙЛЯ

Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка

Введение. Обозначим через $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p,\ p\ge 1,\ r>1/p$ класс функций пространства $C_{2\pi}$, представимых в виде свертки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_r^{\alpha}(x-\tau)h(\tau)d\tau \tag{1}$$

функции $h\in L_p$ с ядром Вейля

$$D_r^{\alpha}(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(k\tau-\frac{\alpha\pi}{2}\right),\quad -\infty<\alpha<\infty.$$

Требование $r>1/p$ обеспечивает существование интеграла (1), а также некоторую гладкость функции f (см., например, [1, с.207]). Если r натуральное и $\alpha=r$, то функция h является r-й производной по отношению к f. При дробных $r=\alpha$ функцию h также принято называть производной порядка r по отношению к f. При различных предположениях относительно h для функций вида (1) были найдены точные оценки наилучших полиномиальных и рациональных приближений (см., например, [2-6]).

Через $R_n^T(f)$ обозначим наилучшее равномерное приближение функции $f(x)\in C_{2\pi}$ рациональными тригонометрическими функциями степени не выше n, т.е. $R_n^T(f)=\inf\limits_{r_n}\|f(x)-r_n(x)\|$. Через $C_j=C_j(r,p)$ далее обозначаем положительные константы, которые могут зависеть только от r и p. Константы, скрывающиеся за символом O, также зависят лишь от r и p. Под записью $\varphi(x)\asymp\psi(x)$ будем понимать, что отношение $\varphi(x)/\psi(x)$ ограничено сверху и снизу некоторыми положительными константами.

Точный порядок наилучших рациональных приближений на классе $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$ при $r=1,p>1$ или $r>1,p\ge 1$ был найден В. Н. Русаком в работе [6]

$$\sup_{f\in W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p} R_n^T(f)\asymp\frac{1}{n^r},$$

на случай $p\ge 1,\ r>1/p$ этот результат был распространен А.П. Старовойтовым в работе [7] с помощью теорем А.А. Пекарского, полученных в [8]. Отметим также, что наилучшие полиномиальные приближения класса $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$ имеют порядок $1/n^{r-1/p}$ (см., например, [9, с.185]), т.е. на данном функциональном классе рациональная аппроксимация существенно выгодней полиномиальной, и это преимущество тем больше, чем меньше p.

Сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена. Интегральные рациональные операторы, построенные В.Н. Русаком (см. [10, 11]), нашли широкое применение в теории рациональной аппроксимации как с фиксированными, так и со свободными полюсами (см., например, [5, 6, 12]). С их помощью удалось получить новые классы функций, на которых рациональная аппроксимация существенно выгоднее полиномиальной, и найти на этих классах точные порядки наилучших рациональных приближений. Аналогичные операторы сумматорно-интерполяционного типа на прямой впервые были построены Е.А. Ровбой [13], на окружности – В.Н. Русаком и Т.С. Мардвилко [14]. В настоящей работе аппаратом приближения функций пространства $C_{2\pi}$ являются сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена, однако их конструкция в сравнении с той, что применяется в [14], несколько изменена. Это сделано для упрощения выбора полюсов операторов, при котором достигается наилучшая по порядку оценка уклонения от приближаемых функций класса $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$. Указанные операторы являются естественным аппаратом приближения и обладают рядом замечательных свойств, поэтому их изучение представляет определенный интерес.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n},0\le|\alpha_k|<1$ – заданная последовательность комплексных чисел, кроме того,

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

еще n чисел взяты равными нулю. Через

$$\pi_n(z)=\prod_{k=1}^{2n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}=z^n\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}$$

обозначим произведение Бляшке по этой системе параметров. Уравнение $\pi_n^3(z)-1=0$ имеет $6n$ различных корней $z_j=e^{iu_j}$, $j=\overline{1,6n}$, расположенных на единичной окружности. Эти корни будем рассматривать в качестве узлов интерполирования.

Определим сумматорный рациональный оператор типа Валле Пуссена равенством

$$V_{4n-1}(u,\varphi)=\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\sum_{j=1}^{6n}\varphi(u_j)l_j(u), \tag{2}$$

где

$$\Phi_n(u)=\arg\pi_n\left(e^{iu}\right),$$

$$l_j(u)=\frac{\sin^2\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)-\sin^2\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\Phi_n'(u_j)\sin^2\frac{u-u_j}{2}}.$$

Как доказано в работе [14], операторы типа Валле Пуссена точны на константах и рациональных функциях специального вида, ограничены (норма не превышает трех), интерполируют приближаемую функцию в узлах u_j. Выбор в настоящей работе дополнительных параметров повлиял на функцию, являющуюся значением оператора (2), а также на точность операторов на рациональных функциях специального вида. Именно, оператор V_{4n-1} каждую функцию $\varphi(u)\in C_{2\pi}$ отображает в рациональную функцию, являющуюся отношением тригонометрических многочленов степени не выше $4n-1$ и $2n$. Также оператор (2) точен на рациональных функциях вида

$$r_{2n}(u)=\frac{t_{2n}(u)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+|\alpha_k|^2-2|\alpha_k|\cos(u-\arg\alpha_k)\right)},$$

где $t_{2n}(u)$ – тригонометрический многочлен степени не выше $2n$, а, следовательно, и на тригонометрических многочленах степени не выше n.

И наконец, назовем наиболее важное свойство интегральных и сумматорных операторов типа Валле Пуссена (см. [11, 13, 14]): в пространстве $C_{2\pi}$ при подходящем выборе полюсов они осуществляют аппроксимацию порядка наилучшей рациональной. Цель настоящей работы заключается в указании конкретного расположения полюсов, при котором уклонение операторов (2) от функций класса $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$ принимает минимальный порядок. Предложенный метод выбора полюсов и оценки уклонения может быть использован при аппроксимации других функциональных классов.

Свойства ядер Вейля и леммы о выборе полюсов. Как известно из [5], функция $D_r^\alpha(z)$ аналитически продолжима с интервала $(0,2\pi)$ во всю полосу $\Omega=\{z:0\le \operatorname{Re} z\le 2\pi\}$ за исключением, может быть, точек $z=0$ и $z=2\pi$.

Лемма 1. *При* $0<r<1$ *в полосе* Ω *справедливо соотношение*

$$\left|D_r^\alpha(z)\right|=O\left(|z|+|z|^{r-1}+|z-2\pi|^{r-1}\right).$$

Доказательство леммы содержится в [5].

Обозначим через q параметр, гармонически сопряженный с p.

Лемма 2. *При действительных* u, v *и* $1/p<r<1$ *имеет место соотношение*

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|D_r^\alpha(u-\tau)-D_r^\alpha(v-\tau)\right|^q d\tau\right)^{1/q}=O\left(\left|\sin\frac{u-v}{2}\right|^{r-1/p}\right).$$

Соотношение можно получить, применяя метод, используемый при доказательстве теоремы в [1, с. 208].

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Далее речь пойдет о приближении функций класса $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$ операторами (2). Опишем выбор параметров α_k, при котором будет происходить оценка уклонения.

Рассмотрим случай $1/p < r < 1$. Для данного натурального n возьмем натуральное η такое, что $1 < \ln_\eta n = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{\eta\ \text{ðàç}} n \le e$. Определим числа β, b_n, b и Δ_μ равенствами

$$\beta = \frac{2(3r+1)}{r-1/p},\ b_n = 2(2\pi+3)(1+9\beta^2)\left(\frac{1}{\ln_1 n}+\frac{1}{\ln_2 n}+\ldots+\frac{1}{\ln_\eta n}\right),$$

$$b = \sup_{2\le n<\infty} b_n,\ \ \Delta_\mu = \frac{b\ln_\mu^3 n}{n}.$$

Не ограничивая общность, в дальнейшем будем считать, что $n \ge b\ln^3 n$, в отношении $h(\tau)$ полагаем

$$\left\|h(\tau)\right\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi}\left|h(\tau)\right|^p d\tau\right)^{1/p} \le 1.$$

Сделаем разбиение отрезка $[0,2\pi]$ точками $\tau_k^1,\ k=\overline{1,m_1+1}$, которые будем называть точками разбиения первого ранга,

$$0=\tau_1^1<\tau_2^1<\ldots<\tau_{m_1+1}^1=2\pi,\ \ \tau_{k+1}^1=\max\left\{\tau:\tau_k^1<\tau\le 2\pi,\ \tau-\tau_k^1\le\Delta_1,\ \int_{\tau_k^1}^{\tau}\left|h(t)\right|^p dt\le\Delta_1\right\}. \quad (3)$$

Пусть построено $\mu-1$ разбиение. Расширяем его до μ-го разбиения добавлением новых точек деления так, что

$$0=\tau_1^\mu<\tau_2^\mu<\ldots<\tau_{m_\mu+1}^\mu=2\pi,\ \ \tau_{k+1}^\mu=\max\left\{\tau:\tau_k^\mu<\tau\le 2\pi,\ \tau-\tau_k^\mu\le\Delta_\mu,\ \int_{\tau_k^\mu}^{\tau}\left|h(t)\right|^p dt\le\Delta_\mu\right\}. \quad (4)$$

Точки μ-го разбиения будем называть точками разбиения μ-го ранга. Будем вводить новые разбиения, пока число $\ln_\mu n$ больше единицы, т.е. последним будет η-е разбиение.

В дальнейшем через ρ обозначаем число, равное $\rho=\rho(N)=\exp(-1/\sqrt{N})$. От какого N зависит ρ, будет видно по смыслу. На каждом радиальном луче $\arg\theta=\tau_l^\mu,\ \mu=\overline{2,\eta},\ l=\overline{1,m_\mu}$ разместим по $2N_\mu,\ N_\mu=\left[\left(3\beta\ln_\mu n\right)^2+1\right]$ параметров α_k в точках

$$\left(1-\Delta\tau_{l-1}^\mu\rho^k\right)e^{i\tau_l^\mu},\ \left(1-\Delta\tau_l^\mu\rho^k\right)e^{i\tau_l^\mu},\ \ k=\overline{1,N_\mu}.$$

Также разместим по $N_1=\left[\left(3r(1+4p/(rp-1))\ln n\right)^2+1\right]$ параметров α_k на каждом радиальном луче $\arg\theta=\tau_l^1,\ l=\overline{0,m_1}$ в точках

$$\left(1-0{,}5\rho^k\right)e^{i\tau_l^1}, k=\overline{1,N_1}.$$

Легко проверить, что общее число m задействованных параметров α_k (не считая n параметров, которые равны нулю) не превышает n. Все остальные $n-m$ параметров можно взять равными нулю.

Приведем ряд лемм, которые понадобятся в дальнейшем при оценке уклонения. В леммах 4 – 6 полагаем, что параметры α_k расположены так, как указано выше.

Лемма 3. *Пусть параметры* $\{\alpha_k\}_{k=1}^N, N\ge 25$ *расположены на радиальном луче по правилу* $\alpha_k=(1-h\rho^k)e^{i\tau}, 0<h\le 1$. *Тогда справедливы оценки*

$$\Phi_n'(u)\ge\begin{cases}\dfrac{\sqrt{N}}{2h\rho^N},\ 2\sin\left|\dfrac{u-\tau}{2}\right|\le h\rho^N,\\[2ex] \dfrac{\sqrt{N}}{5\left|\sin\dfrac{u-\tau}{2}\right|},\ h\rho^N\le 2\sin\left|\dfrac{u-\tau}{2}\right|\le h.\end{cases}$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Лемма 4. *Если* $f(u)\in W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$, *то при* $1/p<r<1$ *имеет место оценка*

$$\left|f(u)-V_{4n-1}(u,f)\right|=O\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-\frac{rp-1}{2p}}\right).$$

Доказательство лемм 3 и 4 проводится подобно доказательству аналогичных лемм работы [15], во втором случае дополнительно необходимо использование леммы 2.

В силу объемности остановимся лишь на идее доказательств следующих двух важных лемм.

Лемма 5. *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *находится* n_η *точек разбиения последнего ранга, точка* u *не принадлежит отрезку* $[a,b]$, $d(u)=\min\left\{\left|\sin\frac{u-a}{2}\right|,\left|\sin\frac{u-b}{2}\right|\right\}>0$. *Тогда*

1) если функция $\Phi_n'(\theta)$ *на отрезке* $[a,b]$ *удовлетворяет неравенству* $\Phi_n'(\theta)\ge A_n$, *то*

$$\sum_{a\le u_j\le b}\left|l_j(u)\right|=O\left(\frac{b-a}{d(u)^2}+\frac{n_\eta}{A_n d(u)^2}\right);$$

2) если на отрезке $[a,b]$ $\Phi_n'(\theta)\ge A_n/\left|\sin\left((u-\theta)/2\right)\right|$, $A_n\ge 1$, *то*

$$\sum_{a\le u_j\le b}\left|l_j(u)\right|=O\left(\frac{n_\eta}{A_n d(u)}\right).$$

Функция $\Phi_n'(\theta)$ заменяется специальной мажорирующей функцией, выпуклой вниз на каждом из отрезков с концами в соседних точках разбиения последнего ранга, и поэтому имеющей не более одного минимума на таком отрезке. Далее для оценки суммы применяется прием, используемый в доказательстве леммы 3 работы [16] при оценке схожей суммы.

Лемма 6. *Пусть* τ_k^μ *и* τ_{k+1}^μ *– соседние точки* μ*-го ранга,* $\tau<\tau_k^\mu$, $h=\tau_{k+1}^\mu-\tau_k^\mu$ *при* $2\le\mu<\eta$ *или* $h=1/2$ *при* $\mu=1$, *причем при* $2\le\mu<\eta$ *точка* τ *принадлежит тому же отрезку* $\mu-1$*-го ранга, что и* τ_k^μ, $d(u)=\min\left\{\left|\sin\frac{u-\tau_k^\mu}{2}\right|,\left|\sin\frac{u-\tau_{k+1}^\mu}{2}\right|\right\}\ge 2h\rho^{N_\mu}$. *Тогда при* $0<r<1$ *справедливо соотношение*

$$\left|\sum_{\tau_k^\mu\le u_j<\tau_{k+1}^\mu}\left(D_r^\alpha(u-\tau)-D_r^\alpha(u_j-\tau)\right)l_j(u)\right|=O\left(\frac{\left(\left|D_r^\alpha(u-\tau)\right|+\left|\tau_k^\mu-\tau\right|^{r-1}\right)h\rho^{\frac{N_\mu}{3}}}{d(u)^2}\right).$$

Оцениваемая сумма разбивается на три. Первые две соответствуют тем u_j, которые близки к τ_k^μ и τ_{k+1}^μ, и оцениваются с помощью лемм 3 и 5. Для оценки третьей суммы рассматривается некоторая вспомогательная функция ψ и контур Γ, окружающий все точки u_j, соответствующие этой сумме. Показывается, что вычеты функции ψ в точках u_j равны соответственным слагаемым третьей суммы, поэтому для получения ее оценки можно оценить интеграл от ψ по контуру Γ. Здесь существенно используются свойства ядра Вейля и разбиения отрезка $[0,2\pi]$. В работе [17] такая схема применялась при оценке похожей суммы, но доказательство проходило гораздо проще благодаря использованию точек разбиения только первого ранга, при этом указанный там выбор полюсов приближающего оператора не позволил получить уклонение порядка наилучших рациональных приближений.

Оценки уклонений рациональных операторов в равномерной метрике.

Теорема. *Если функция* $f(u)\in W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$, *то при подходящем выборе параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *справедлива оценка*

$$\left\|f(u)-V_{4n-1}(u,f)\right\|=O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Доказательство. Проведем доказательство для случая $1/p<r<1$. На основании представлений (1), (2) и точности оператора V_{4n-1} на константах запишем его уклонение от функции $f(u)$ в форме

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$f(u)-V_{4n-1}(u,f)=\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\sum_{j=1}^{6n}\left(f(u)-f\left(u_j\right)\right)l_j(u)=$$

$$=\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{j=1}^{6n}\int_0^{2\pi}\left(D_r^\alpha\left(u-\tau\right)-D_r^\alpha\left(u_j-\tau\right)\right)h\left(\tau\right)d\tau l_j(u)=$$

$$=\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{j=1}^{6n}\left(\int_0^{u_j}+\int_{u_j}^{2\pi}\right)\left(D_r^\alpha\left(u-\tau\right)-D_r^\alpha\left(u_j-\tau\right)\right)h\left(\tau\right)d\tau l_j(u)=S+S'.$$

Обозначим через $M_{k,\mu}=\{s\}$ множество значений индекса s, для которых концевые точки отрезков μ-го ранга принадлежат k-му отрезку $\mu-1$-го ранга. Тогда сумму S можно представить в виде

$$S=\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{k=1}^{m_1}\sum_{\tau_k^1\le u_j<\tau_{k+1}^1}\int_0^{\tau_k^1}\left(D_r^\alpha\left(u-\tau\right)-D_r^\alpha\left(u_j-\tau\right)\right)h\left(\tau\right)d\tau l_j(u)+$$

$$+\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{\mu=2}^{\eta}\sum_{k=1}^{m_{\mu-1}}\sum_{s\in M_{k,\mu}}\sum_{\tau_s^\mu\le u_j<\tau_{s+1}^\mu}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left(D_r^\alpha\left(u-\tau\right)-D_r^\alpha\left(u_j-\tau\right)\right)h\left(\tau\right)d\tau l_j(u)+ \qquad (5)$$

$$+\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{k=1}^{m_\eta}\sum_{\tau_k^\eta\le u_j<\tau_{k+1}^\eta}\int_{\tau_k^\eta}^{u_j}\left(D_r^\alpha\left(u-\tau\right)-D_r^\alpha\left(u_j-\tau\right)\right)h\left(\tau\right)d\tau l_j(u)=:S^1+\sum_{\mu=2}^{\eta}S^\mu+S^0.$$

Оценим сначала сумму $S^\mu,\ \mu=\overline{2,\eta}$. Для точки u, в которой производится оценка уклонения, определим окрестность

$$\delta_\mu\left(u\right)=\left\{x:0\le x\le 2\pi,\left|\sin\frac{u-x}{2}\right|\le\frac{1}{n\ln_{\mu-1}^{\chi}n}=:d_\mu\right\},\ \chi=\frac{p+3}{rp-1},$$

состоящую из одного или двух отрезков. Пусть $S^\mu=S_1^\mu+S_2^\mu+S_3^\mu$, где S_1^μ берется по отрезкам $\mu-1$-го ранга, полностью принадлежащим $\delta_\mu\left(u\right)$, S_3^μ – по отрезкам, не имеющим общих точек с $\delta_\mu\left(u\right)$. С учетом леммы 2, ограниченности нормы оператора и условия (4) для S_1^μ будем иметь

$$\left|S_1^\mu\right|\le\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_k\sum_{s\in M_{k,\mu}}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left|\sum_{\tau_s^\mu\le u_j<\tau_{s+1}^\mu}\left(D_r^\alpha\left(u-\tau\right)-D_r^\alpha\left(u_j-\tau\right)\right)l_j(u)\right|\left|h\left(\tau\right)\right|d\tau\le$$

$$\le\max_{\substack{k:[\tau_k^{\mu-1},\tau_{k+1}^{\mu-1}]\in\delta_\mu(u)\\ j:u_j\in\delta_\mu(u)}}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_{k+1}^{\mu-1}}\left|\left(D_r^\alpha\left(u-\tau\right)-D_r^\alpha\left(u_j-\tau\right)\right)\right|\left|h\left(\tau\right)\right|d\tau\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{j=1}^{6n}\left|l_j(u)\right|\le$$

$$\le\frac{3}{\pi}\max_{\substack{k:[\tau_k^{\mu-1},\tau_{k+1}^{\mu-1}]\in\delta_\mu(u)\\ j:u_j\in\delta_\mu(u)}}\left(\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_{k+1}^{\mu-1}}\left|h\left(\tau\right)\right|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_{k+1}^{\mu-1}}\left|\left(D_r^\alpha\left(u-\tau\right)-D_r^\alpha\left(u_j-\tau\right)\right)\right|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\le \qquad (6)$$

$$\le C_1\Delta_{\mu-1}^{\frac{1}{p}}d_\mu^{r-\frac{1}{p}}=\frac{C_1 b^{\frac{1}{p}}\ln_{\mu-1}^{\frac{3}{p}}n}{n^r\ln_{\mu-1}^{\chi\left(r-\frac{1}{p}\right)}n}=O\left(\frac{1}{n^r\ln_{\mu-1}n}\right).$$

Параметры, расположенные на лучах, соответствующих точкам разбиения μ-го ранга, позволяют получить удовлетворительную оценку сумм S_2^μ и S_3^μ. Применяя леммы 6, 1 и неравенство Гельдера, получим

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$\left|S_3^\mu\right| \le \frac{C_2}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_k\sum_{s\in M_{k,\mu}}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\max_{\lambda\in\{s,s+1\}}\left\{\frac{\rho^{\frac{N_\mu}{3}}\Delta\tau_s^\mu\left(\left|D_r^\alpha(u-\tau)\right|+\left|\tau_k^\mu-\tau\right|^{r-1}\right)}{\sin^2\frac{u-\tau_\lambda^\mu}{2}}\right\}\left|h(\tau)\right|d\tau \le$$

$$\le \frac{C_2\rho^{\frac{N_\mu}{3}}}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_k\sum_{s\in M_{k,\mu}}\max_{\lambda\in\{s,s+1\}}\frac{\Delta\tau_s^\mu}{\sin^2\frac{u-\tau_\lambda^\mu}{2}}\left(\left(\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left|D_r^\alpha(u-\tau)\right|^q d\tau\right)^{1/q}\left(\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left|h(\tau)\right|^p d\tau\right)^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left|\tau_k^\mu-\tau\right|^{(r-1)q}d\tau\right)^{1/q}\left(\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left|h(\tau)\right|^p d\tau\right)^{1/p}\right)\le\frac{C_3\rho^{\frac{N_\mu}{3}}\Delta_{\mu-1}^{1/p}}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_k\sum_{s\in M_{k,\mu}}\max_{\lambda\in\{s,s+1\}}\frac{\Delta\tau_s^\mu}{\sin^2\frac{u-\tau_\lambda^\mu}{2}}\left(\int_0^{\Delta_{\mu-1}}t^{(r-1)q}dt\right)^{1/q}=$$

$$=\frac{C_3\rho^{\frac{N_\mu}{3}}\Delta_{\mu-1}^{1/p}\Delta_{\mu-1}^{r-1/p}}{3\pi\left((r-1)q+1\right)^{1/q}\Phi_n'(u)}\sum_k\sum_{s\in M_{k,\mu}}\max_{\lambda\in\{s,s+1\}}\frac{\Delta\tau_s^\mu}{\sin^2\frac{u-\tau_\lambda^\mu}{2}}.$$

Продолжая оценку, будем иметь

$$\begin{aligned}\left|S_3^\mu\right|&\le\frac{C_4\rho^{\frac{N_\mu}{3}}\Delta_{\mu-1}^r}{n}\sum_{s=0}^\infty\frac{\Delta_\mu}{\left(d_\mu+s\Delta_\mu\right)^2}\le\frac{C_4\Delta_{\mu-1}^r\rho^{\frac{N_\mu}{3}}}{n}\left(\frac{\Delta_\mu}{d_\mu^2}+\frac{1}{\Delta_\mu}\sum_{s=1}^\infty\frac{1}{s^2}\right)\le\\&\le\frac{2C_4\Delta_{\mu-1}^r\rho^{\frac{N_\mu}{3}}}{n}\frac{\Delta_\mu}{d_\mu^2}=\frac{2b^{r+1}C_4\ln_{\mu-1}^{2\chi}n\ln_{\mu-1}^{3r}n\ln_\mu^3 n}{n^r\ln_{\mu-1}^\beta n}=O\left(\frac{1}{n^r\ln_{\mu-1}n}\right).\end{aligned}\tag{7}$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Сумму S_2^μ разобьем на три, $S_2^\mu=S_{21}^\mu+S_{22}^\mu+S_{23}^\mu$. Сумма S_{21}^μ берется по отрезкам μ-го ранга, полностью принадлежащим $\delta_\mu(u)$, и оценивается аналогично (6). Сумма S_{23}^μ состоит из слагаемых, соответствующим отрезкам μ-го ранга, которые не пересекаются с $\delta_\mu(u)$, и оценивается аналогично S_3^μ. Остается рассмотреть слагаемые суммы S_2^μ, которые соответствуют отрезкам μ-го ранга, частично пересекающимся с $\delta_\mu(u)$. Таких отрезков не более двух. Рассмотрим сумму σ по одному из таких отрезков $\left[\tau_s^\mu,\tau_{s+1}^\mu\right]$.

Если $\left|\sin\left(\left(u-\tau_s^\mu\right)/2\right)\right|\ge d_\mu, \left|\sin\left(\left(u-\tau_{s+1}^\mu\right)/2\right)\right|\ge d_\mu$, то S_2^μ оценивается так же, как и сумма по одному отрезку μ-го ранга в S_3^μ. Пусть теперь одна из концевых точек отрезка $\left[\tau_s^\mu,\tau_{s+1}^\mu\right]$, для определенности τ_s^μ, принадлежит $\delta_\mu(u)$. Если $\left|\sin\left(\left(u-\tau_s^\mu\right)/2\right)\right|\ge d_\mu/\left(\ln_{\mu-1}^{3r+1}n\ln_\mu^2 n\right)$, то, применяя леммы 3, 6 и оценивая интеграл так же, как и в S_3^μ, получим

$$|\sigma|\le\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left|\sum_{\tau_s^\mu\le u_j<\tau_{s+1}^\mu}\left(D_r^\alpha(u-\tau)-D_r^\alpha(u_j-\tau)\right)l_j(u)\right|\left|h(\tau)\right|d\tau\le$$

$$\le\frac{C_5\left|\sin\frac{u-\tau_s^\mu}{2}\right|}{\sqrt{N_\mu}}\frac{\Delta\tau_s^\mu\rho^{\frac{N_\mu}{3}}}{\sin^2\frac{u-\tau_s^\mu}{2}}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left(\left|D_r^\alpha(u-\tau)\right|+\left|\tau_k^\mu-\tau\right|^{r-1}\right)\left|h(\tau)\right|d\tau\le$$

$$\le\frac{C_6\rho^{\frac{N_\mu}{3}}}{\sqrt{N_\mu}}\frac{\Delta_\mu\ln_{\mu-1}^{3r+1}n\ln_\mu^2 n}{d_\mu}\Delta_{\mu-1}^{1/p}\Delta_{\mu-1}^{r-1/p}\le\frac{C_7\ln_{\mu-1}^{4r+1+\chi}n\ln_\mu^4 n}{\ln_{\mu-1}^\beta n^r}=O\left(\frac{1}{n^r\ln_{\mu-1}n}\right).$$

Если же $\left|\sin\left(\left(u-\tau_s^\mu\right)/2\right)\right|<d_\mu/\left(\ln_{\mu-1}^{3r+1}n\ln_\mu^2 n\right)$, то, разбивая сумму σ на две и используя лемму 2, будем иметь

$$|\sigma| \le \frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\left(\sum_{u_j\in[\tau_s^\mu,\tau_{s+1}^\mu]\cap\delta(u)} + \sum_{u_j\in[\tau_s^\mu,\tau_{s+1}^\mu]\setminus\delta(u)}\right)\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left|D_r^\alpha(u-\tau)-D_r^\alpha(u_j-\tau)\right|\left|h(\tau)\right|d\tau\left|l_j(u)\right| \le$$

$$\le \frac{C_8}{3\pi\Phi_n'(u)}\left(\Delta_{\mu-1}^{\frac{1}{p}} d_\mu^{r-\frac{1}{p}}\sum_{u_j\in[\tau_s^\mu,\tau_{s+1}^\mu]\cap\delta(u)}\left|l_j(u)\right| + \Delta_{\mu-1}^{\frac{1}{p}}\Delta_{\mu-1}^{r-\frac{1}{p}}\sum_{u_j\in[\tau_s^\mu,\tau_{s+1}^\mu]\setminus\delta(u)}\left|l_j(u)\right|\right).$$

Из (4) следует, что на каждом отрезке μ-го ранга содержится не более $\left[2\Delta_\mu/\Delta_\eta\right]$ точек η-го ранга, поэтому с учетом лемм 3, 5 и ограниченности нормы оператора найдем

$$|\sigma| \le C_9\left(\frac{\ln_{\mu-1}^{\frac{1}{p}} n}{n^r \ln_{\mu-1}^{\chi\left(r-\frac{1}{p}\right)} n} + \frac{\Delta_{\mu-1}^r}{\Phi_n'(u)}\frac{\ln_\mu^3 n}{\sqrt{N_\mu}\, d_\mu}\right) \le C_{10}\left(\frac{1}{n^r \ln_{\mu-1}^{\chi\left(r-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}} n} + \frac{d_\mu \ln_{\mu-1}^{3r} n}{n^r \ln_{\mu-1}^{3r+1} n \ln_\mu^2 n}\frac{\ln_\mu^3 n}{d_\mu \ln_\mu n}\right) = O\left(\frac{1}{n^r \ln_{\mu-1} n}\right).$$

Таким образом, для суммы S_2^μ верна оценка

$$\left|S_2^\mu\right| = O\left(\frac{1}{n^r \ln_{\mu-1} n}\right),$$

поэтому, учитывая (6) и (7), заключаем

$$\left|S^\mu\right| = O\left(\frac{1}{n^r \ln_{\mu-1} n}\right). \tag{8}$$

На основании леммы 2 и ограниченности нормы оператора для суммы S^0 будет верным неравенство

$$\left|S^0\right| \le \frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\max_{\substack{k,\,[\tau_k^\eta,\tau_{k+1}^\eta]\in\delta(u)\\ j,\,u_j\in\delta(u)}}\left(\int_{\tau_k^\eta}^{u_j}\left|D_r^\alpha(u-\tau)-D_r^\alpha(u_j-\tau)\right|\left|h(\tau)\right|d\tau\right)\sum_k\sum_{\tau_k^\eta\le u_j<\tau_{k+1}^\eta}\left|l_j(u)\right| \le$$

$$\le C_{11}\Delta_\eta^{r-\frac{1}{p}}\Delta_\eta^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{9}$$

Удовлетворительную оценку суммы S^1 позволяют получить параметры, расположенные на лучах, соответствующих точкам разбиения первого ранга. Если для некоторой точки первого ранга τ_k^1 верно неравенство $2\sin\left(\left(u-\tau_k^1\right)/2\right) \le n^{-2rp/(rp-1)}$, то, согласно леммам 4 и 3,

$$\left|f(u)-V_{4n-1}(u,f)\right| \le C_{12}\left(\frac{5}{\sqrt{N_1}}n^{\frac{-2rp}{rp-1}}\right)^{\frac{rp-1}{2p}} = O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{10}$$

В противном случае с учетом условия (3) и леммы 6 имеем оценку

$$\left|S^1\right| \le \frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{k=1}^{m_1}\int_0^{\tau_k^1}\left|\sum_{\tau_k^1\le u_j<\tau_{k+1}^1}\left(D_r^\alpha(u-\tau)-D_r^\alpha(u_j-\tau)\right)l_j(u)\right|\left|h(\tau)\right|d\tau \le$$

$$\le \frac{C_{13}}{n}\sum_{k=1}^{m_1}\int_0^{\tau_k^1}\max_{\lambda=k,k+1}\left(\frac{\rho^{\frac{N_1}{3}}\left(\left|D_r^\alpha(u-\tau)\right|+\left|\tau_k^1-\tau\right|^{r-1}\right)}{\sin^2\dfrac{u-\tau_\lambda^1}{2}}\right)\left|h(\tau)\right|d\tau \le \tag{11}$$

$$\le \frac{C_{14}}{n}\frac{n^{\frac{4rp}{rp-1}}m_1}{n^{\frac{4rp}{rp-1}+r}}\int_0^{2\pi}\tau^{r-1}\left|h(\tau)\right|d\tau \le \frac{C_{15}}{n^r\ln_1^3 n} = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

На основании соотношений (8)–(11) окончательно заключаем, что для суммы S верна оценка

$$|S| = O\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\sum_{\mu=2}^{\eta}\frac{1}{\ln_{\mu-1} n}\right) = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Аналогичным образом можно показать, что для суммы S' имеет место такая же оценка, причем для ее получения нет надобности привлекать новые параметры α_k.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Таким образом, для случая $1/p<r<1$ теорема доказана. При $r\geq 1$ общая схема оценки уклонения остается такой же, но в деталях доказательство несколько упрощается благодаря большей гладкости приближаемой функции.

Доказательство теоремы закончено.

Из теоремы следует, что при указанном расположении полюсов операторы V_{4n-1} на классе $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$ осуществляют аппроксимацию порядка наилучшей рациональной.

Отметим в заключение, что усеченные сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена использовались В.Н. Русаком и И.В. Рыбаченко в работе [18] для приближения на отрезке функций, имеющих дробную производную в смысле Римана-Лиувилля из L_p. Однако при указанном расположении полюсов приближающих операторов было получено уклонение порядка $\ln^2 n/n^r$, что множителем $\ln^2 n$ отличается от порядка наилучшего рационального приближения.

Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.2. М., 1965.
2. Дзядык В. К // В кн.: Исследования по совр. пробл. констр. теории ф. М., 1961. С.72–82.
3. Стечкин С. Б. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. № 20. С.643–648.
4. Теляковский С. А. // Тр. ММО. 1961. Т. 52. С. 61–97.
5. Русак В. Н. // Матем. сб. 1985. Т. 128, №4. С. 492–515.
6. Русак В. Н. // Докл. АН СССР. 1990. Т.315, №2. С. 313–316.
7. Старовойтов А. П. // Матем. заметки. 2005. Т. 87, №3. С. 428–441.
8. Пекарский А. А. // Матем. сб. 1985. Т. 127, №1. С. 3–20.
9. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Из-во МГУ, 1976.
10. Русак В. Н. // Матем. заметки. 1977. Т. 22, №.3. С. 375–380.
11. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
12. Пекарский А. А. // Матем. сб. 1987. Т. 133 (175), №1 (5). С. 86–102.
13. Ровба Е. А. // Матем. заметки. 1993. Т. 53, №2. С. 114–121.
14. Русак В. М., Мардвілка Т.С. // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. 2006. №2. С.13–15.
15. Мардвілка Т.С. // Весці БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія, 2007. №2. С. 28–32.
16. Гриб Н.В. // Труды 6-й международной математической конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений». 2012. Т.1. С. 53–58.
17. Ровба Е. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. №2. С. 8–13.
18. Русак В. Н., Рыбаченко И. В. // Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2001. Т. 9. С. 123–130.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ