УДК 514.1

Н. В. Гриб, К. А. Борисенко
N. Grib, K. Borisenko
Белорусский государственный педагогический
Университет имени Максима Танка
(Минск, Беларусь)

ЗАДАЧА О ДВУХ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КАРТАХ
THE PROBLEM OF TWO GEOGRAPHICAL MAPS

Методом геометрических преобразований решена задача о ближайших точках на двух картах.

The problem of the nearest points on two maps is solved by the method of geometric transformations.

Ключевые слова: преобразование плоскости, движение, преобразование подобия, неподвижная точка преобразования.

Keywords: plane transformations, plane motion, similarity transformation, transformation fixed point.

Достаточно часто в сборниках олимпиадных и нестандартных математических задач (например, [1, стр.63]) можно встретить следующую задачу о двух картах: «Две прямоугольные карты одной местности разного масштаба наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка местности». Такую точку будем называть неподвижной точкой двух карт.

В работе [2] была рассмотрена более общая задача: найти все неподвижные точки двух карт при том, что карты могут иметь любой масштаб, располагаться произвольным образом, в том числе и «лицом» вниз. В некоторых случаях могло оказаться, что неподвижной точки не существует. Тогда можно поставить вопрос: в каком месте необходимо проткнуть карты, чтобы две проколотые точки местности были географически наиболее близки? Понятно, что этот вопрос можно задавать и в том случае, когда существование неподвижных точек еще не установлено. Таким образом, приходим к еще более общей задаче:

На столе лежат две карты одной местности. В каком месте их нужно проткнуть булавкой, чтобы две отмеченные точки местности были наиболее близки?

Наиболее естественным методом решения всех указанных выше задач является метод преобразований плоскости. Пусть карты F и F' с вершинами A, B, C, D и A', B', C', D' соответственно лежат в плоскости П, а ψ – преобразование плоскости, переводящее F в F'. Не ограничивая общность, можем считать, что карта F лежит «лицом» вверх, а расстояние между двумя точками на местности равно расстоянию между изображающими их точками карты F.

Приведем несколько лемм, которые понадобятся при решении задачи.

Лемма 1. *Проколотой точке M' карты F' соответствует точка $M = \psi^{-1}(M')$ карты F, т.е. прообраз точки M' при преобразовании ψ.*

Лемма 2. *Если точки A' и B' являются образами точек A и B при некотором повороте с центром O и $OA < OB$, то $AA' < BB'$.*

Лемма 3. *Пусть точки A' и B' являются образами точек A и B при некоторой скользящей симметрии с осью l. Если $A \in l$, $B \notin l$, то $AA' < BB'$.*

Лемма 4. *Если точки A' и B' – образы точек A и B при некотором преобразовании подобия с неподвижной точкой O и $OA < OB$, то $AA' < BB'$.*

Необходимо рассмотреть следующие случаи.

1. Карты имеют одинаковый масштаб и F' лежит «лицом» вверх. Тогда ψ – собственное (сохраняющее ориентацию) движение плоскости П, т.е. параллельный перенос или поворот. Если векторы $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$ равны (рис. 1), то ψ – параллельный перенос на вектор $\overline{AA'}$. По лемме 1 точке M' карты F' соответствует точка M карты F, полученная параллельным переносом M' на вектор $\overline{A'A}$, а расстояние между точками местности, изображаемыми проколотыми точками, равно длине отрезка AA' и поэтому не зависит от выбора точки прокола.

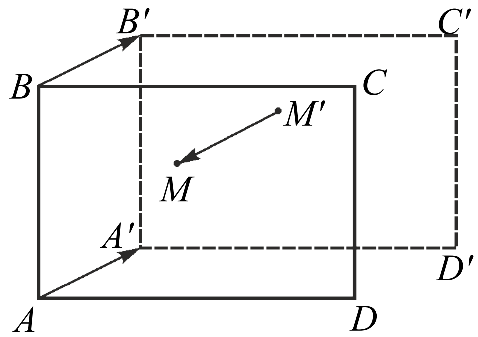

Рисунок 1

Если же векторы $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$ не равны, то ψ – поворот. Его центр О находится на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам AA' и BB' (рис. 2). Если точка О принадлежит F и F', то она является неподвижной точкой карт и, следовательно, искомой точкой. В противном случае по лемме 2 искомой точкой будет ближайшая к О общая точка F и F' (на рис. 3 – точка M').

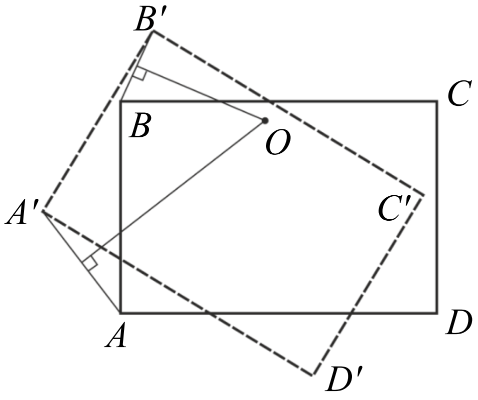

Рисунок 2

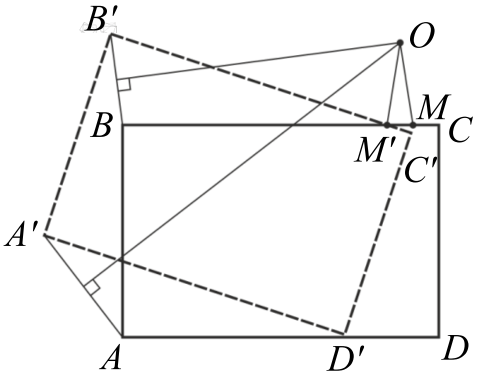

Рисунок 3

2. Карты имеют одинаковый масштаб и F' лежит «лицом» вниз. В этом случае движение ψ является несобственным, т.е. осевой или скользящей симметрией. Если серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам AA' *и* BB'. совпадают, то ψ – осевая симметрия с осью l_1 (рис. 4), поэтому неподвижными точками карт будут все точки отрезка прямой l_1, принадлежащего F.

Если l_1 и l_2 не совпадают, то ψ – скользящая симметрия, которая не имеет неподвижных точек. Для нахождения ее оси l воспользуемся тем, что на ней находится середины всех отрезков с концами в точке и ее образе. Вектором переноса $\bar{a}$ будет проекция вектора $\overline{AA'}$ на эту ось (на рис. 5 $\bar{a} = \overline{KA'}$). Из леммы 3 следует, что искомыми будут все точки отрезка прямой l, принадлежащего F и F', а расстояние между «проколотыми» точками местности равно длине вектора $\bar{a}$.

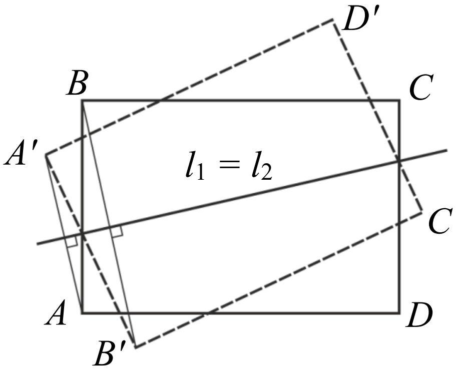

Рисунок 4

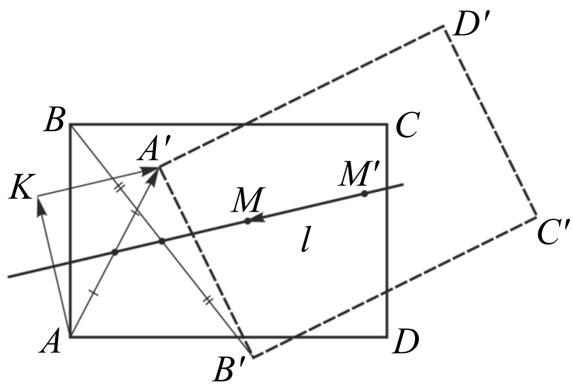

Рисунок 5

3. Пусть теперь карты имеют разный масштаб, тогда ψ – некоторое преобразование подобия с коэффициентом $k = A'B'/AB \neq 1$, поэтому имеет единственную неподвижную точку O. Для ее нахождения будем использовать окружность Аполлония – множество точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная. Из соотношений $OA' = k\,OA$, $OB' = k\,OB$, $OC' = k\,OC$ следует, что точка О должна принадлежать каждой из трех окружностей, определяемых парами точек A и A', В и B', С и C' (рис. 6). Если О не принадлежит F и F', то по лемме 4 искомой точкой будет ближайшая к О общая точка F и F'.

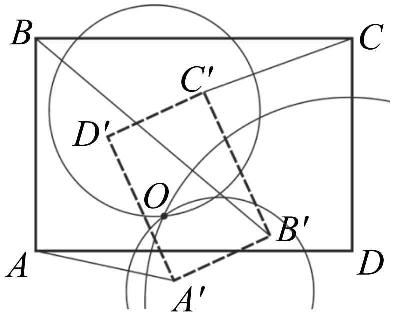

Рисунок 6

В заключение отметим, что подобные задачи о картах являются хорошим материалом для организации научно-исследовательской деятельности студентов и школьников. К их достоинствам можно отнести доступность, вариативность, практический характер и возможность проверки полученных результатов.

Список использованных источников

1. Канель-Белов А.Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи ; под ред. В. О. Бугаенко. – 5-е изд., испр. – М. : Изд-во МЦНМО, 2009. – 94 с.

2. Салтавец, С.А. Задача о неподвижных точках двух карт / С.А. Салтавец, В.В. Бреский // Инновационные подходы к обучению физике, математике, информатике: материалы Междунар. студ. науч.-практ. интернет-конф., г. Минск, 22 апреля 2021 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка; редкол. С.И. Василец, А.Ф. Климович (отв. ред.), В.Р. Соболь [и др.]. – Минск : БГПУ, 2021. – С. 165–168.