УДК 372.8

П. С. Бахарева, Н. А. Кирин
P. Bakhareva, N. Kirin
Государственный социально-гуманитарный университет
(Коломна, Россия)

ИЗУЧЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ВЕЛИЧИН В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ КАК СПОСОБ МОТИВАЦИИ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

THE STUDY OF INVARIANT QUANTITIES IN THE SCHOOL MATH AS A MOTIVATION METHOD OF LEARNING AND COGNITIVE ACTIVITY OF STUDENTS

В работе рассматриваются пути реализации системно-деятельностного подхода в обучении математике посредством изучения инвариантов, возникающих в математических и прикладных задачах.

The paper considers the ways to implementing a system-activity approach in math teaching by studing invariants arise in mathematical and applied problems.

Ключевые слова: системно-деятельностный подход, инварианты.

Keywords: system-activity approach, invariants.

В современной школе одним из важнейших принципов, на котором базируется изучение отдельных предметов, в том числе и математики, является системно-деятельностный подход, суть которого заключается в обеспечении субъектной позиции учащегося, предполагающей его активное включение в учебную работу.

Одним из способов мотивации учебно-познавательной деятельности учащихся является создание проблемной ситуации, в частности той, которая вызывает интерес к объекту изучения. Таким объектом в содержании учебного предмета «Математика» могут быть инвариантные величины. На первых порах учащимся проще увидеть инвариантную величину в задаче с более простой формулировкой, возможно, чисто математической, чтобы не отвлекаться на несущественные детали. Например, можно рассмотреть появление инвариантных величин в геометрических задачах ЕГЭ по математике с кратким ответом. Рассмотрим в качестве примера две такие задачи [1].

Задача 1. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.

Решение:

Пусть C – вершина равнобедренного треугольника ABC, точка D принадлежит стороне AB, $DM \parallel BC$ и $DN \parallel AC$. Используя равенство углов при основании равнобедренного треугольника и равенство соответствующих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей, можно показать, что $AM = MD$, $DN = NB$, $MC = DN$ *и* $MD = CN$. Периметр параллелограмма равен

$$P = AM + MC + CN + BN = (AM + MC) + (CN + BN) = AC + CB = 10 + 10 = 20.$$

Нетрудно видеть, что искомая величина не зависит от выбора точки D на основании AC, поэтому она является в этом смысле инвариантной, на что намекает требование однозначности ответа к данной задаче и отсутствие каких-либо ограничений на выбор точки D. В работе [2] показано, что данный инвариант сохраняется даже при вырожденных случаях, когда точка D совпадет с одним из концов основания AC.

Задача 2. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение:

Обозначив острые углы прямоугольного треугольника через 2α и 2β, мы заключаем, что $2\alpha+2\beta=90^0$, следовательно, $\alpha+\beta=45^0$. Тогда тупой угол между биссектрисами равен 135^0, а острый равен 45^0.

Мы видим, что и в данном случае искомая величина не зависит от градусной меры острых углов прямоугольного треугольника, следовательно, она является инвариантной относительно этого выбора.

После знакомства с инвариантами в математических задачах можно перейти к выявлению инвариантов в игровых ситуациях и к анализу влияния этих инвариантов, в том числе на выигрышную стратегию.

Задача 3 «Форд Бойярд». На столе лежит 20 палочек. Участники по очереди вытягивают палочки (обратно палочки не возвращаются). За один раз можно вытянуть 1, 2 или 3 палочки. Проигрывает тот, кто вытягивает последнюю палочку. Есть ли выигрышная стратегия для данной игры?

Решение:

Можно заметить, что в данной игре независимо от действия соперника, всегда можно вытянуть с ним в сумме за два подряд идущих хода ровно 4 палочки: 1+3, 2+2 или 3+1. Это и является инвариантной величиной. Таким образом, весь процесс вытягивания 20-ти палочек разбивается на 5 циклов по 4 палочки. Следовательно, первому игроку достаточно на первом ходу вытянуть 3 палочки, а далее вместе с соперником пройти 4 цикла по 4 палочки. После чего, сопернику достанется последняя палочка из «разорванного» первого цикла, то есть процесс игры можно описать суммой 3+4+4+4+4+1, где числа 4 означают суммарное вытягивание 4-х палочек за два подряд идущих хода. Значит, первый игрок может гарантированно одержать победу.

Интересный инвариант возникает при игре в «15» [3, с.75]. Если обозначить числом А количество пар плиток, в которых плитки с большим номером расположены ранее плитки с меньшим номером, а числом В – номер строки, в которой находится пустое поле, то четность суммы $(A + B)$ является инвариантом. И этот инвариант делит все позиции игры «15» на два непересекающихся семейства: «четные» и «нечетные», и только «четные» можно упорядочить.

Возникают инварианты и в простых карточных фокусах. Например, в таком: фокусник демонстрирует 21 карту и просит кого-то загадать одну из этих карт. Затем фокусник раскладывает карты по одной по трем кучкам и просит указать, в какой кучке оказывается загаданная карта. После чего помещает данную кучку между двумя оставшимися кучками. Такое раскладывание повторяется ещё два раза, после чего фокусник, отсчитав 11-ю карту по счету (но не показывая вид, что он считает карты) «угадывает» ту самую выбранную зрителем карту.

Секрет фокуса прост. После первой раскладки карт 7+7+7, загаданная карта перемещается вместе со своей кучкой в центр. Это означает, что перед ней гарантировано будет с каждой стороны по 2 карты, так как 7:3=2 (ост 1). Следовательно, после второй раскладки и после перемещения нужной кучки в центр ситуация будет следующей: 7+(2+3+2)+7. И наша карта будет одной из трех в самом центре. Но это равносильно (7+2)+3+(2+7) = 9+3+9. То есть после третьей раскладки в той кучке, где будет лежать загаданная карта, перед и после этой карты будет гарантировано располагаться по 3 карты, так как 9:3=3 (ост 0). И мы будем иметь ситуацию 7+(3+1+3)+7 или, что то же самое, 10+1+10. Мы видим нужная карта находится на 11-ом месте, с любой стороны от собранной вместе пачки. Достаточно лишь, не выдавая секрет фокуса, незаметно отсчитать 11-ю карту и предъявить её зрителям.

После выяснения секрета фокуса и его математической сути, учащиеся могут самостоятельно поискать варианты этого фокуса с другим количеством карт. Несложно показать, что всего для колоды из 36 карт возможны 5 случаев:

- 3 карты – дадут для искомой карты №2 (тривиальный случай);
- 9 карт – дадут для искомой карты №5 (слишком мало карт, легко заметить нужную и без секрета фокуса);

- 15 карт – дадут для искомой карты №8 (слишком мало карт, можно заметить нужную и без секрета фокуса);
- 21 карта – дадут для искомой карты №11;
- 27 карт – дадут для искомой карты №14 (слишком много карт, фокус получается затянутым).

Такие разнообразные задачи с инвариантами способствуют значительному повышению интереса к математике и позволяют включить учащихся в активную учебно-познавательную и исследовательскую деятельность.

Список использованных источников

1. Семенов А.Л. ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В/ А.Л.Семенов, И.В.Ященко, И.Р.Высоцкий, Д.Д.Гущин, М.А.Посицельская, С.Е.Посецельский, С.А.Шестаков, Д.Э.Шноль, П.И.Захаров, А.В.Семенов, В.А.Смирнов; под. ред. А.Л.Семенова, И.В.Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2011. – 511 с.
2. Кирин Н.А., Мосолова Ю.В. Развитие интереса к математическим дисциплинам посредством создания проблемной ситуации при рассмотрении вырожденных случаев. Педагогическое образование и наука. Электронный научный журнал. 2019. №2. С. 78-82. URL: http://www.manpo.ru/manpo/publications/nmj_poin.shtml
3. Математическая составляющая/ Редакторы-составители Н.Н.Андреев, С.П.Коновалов, Н.М.Панюнин; художник-оформитель Р.А.Кокшаров. – М.: Фонд «Математические этюды», 2015. – 151 с.