УДК 517.53

Н.В. ГРИБ

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАТОРНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ КУСОЧНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка

Интегральные рациональные операторы типа Джексона на прямой и окружности впервые были построены В.Н. Русаком [1]. Е.А. Ровба построил аналогичные операторы сумматорного типа для прямой [2,3]. На окружности сумматорные рациональные операторы типа Джексона впервые были построены автором в [4]. В настоящей работе исследуется сходимость задаваемых ими последовательностей рациональных функций к непрерывным 2π-периодическим кусочно-выпуклым функциям.

По заданной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, $0 \le |\alpha_k| < 1$ определим произведение Бляшке

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k} z}.$$

Уравнение $\pi_n^2(z) - 1 = 0$ имеет $2n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}$, $j = \overline{1,2n}$, расположенных на окружности $|z| = 1$.

Введем следующие обозначения

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu}), \quad \rho_n(z) = z \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\overline{\alpha_k} z)(z-\alpha_k)},$$

$$\psi_n(z) = \frac{2}{3}\left(2\rho_n^3(z) + \rho_n(z) - z\rho_n'(z) - z^2\rho_n''(z)\right), \quad K_n(z,\xi) = \left(\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)} - 2\right)\frac{z\xi}{(z-\xi)^2}.$$

В пространстве $C(L)$ непрерывных на единичной окружности функций введем сумматорный рациональный оператор типа Джексона

$$D_{4n-2}(z,f) = \frac{1}{\psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n^2(z,z_j)}{\rho_n(z_j)} f(z_j).$$

Данный оператор является точным на константах, а его значение $D_{4n-2}(z,f)$ – рациональная функция порядка не выше $4n-2$. При $z = e^{iu}$, $z_j = e^{iu_j}$, $\varphi(u) = f(e^{iu})$, $\Psi_n(u) = \psi_n(e^{iu})$ также справедливо другое представление оператора D_{4n-2} (см. [4])

$$D_{4n-2}(u,\varphi) = \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\varphi(u_j)}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4 \frac{u-u_j}{2}}.$$

Лемма 1. *Имеют место неравенства*

$$\Psi_n(u) > \left(\Phi_n'(u)\right)^3,$$

$$\Psi_n(u) > \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(\left(1-|\alpha_k|\right)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u-\arg\alpha_k}{2}\right)^2}.$$

Доказательство. Будем в дальнейшем полагать, что $|z| = 1$. Представим $\rho_n(z)$ в виде суммы простых дробей

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k}{z-\alpha_k} + \frac{1}{1-\overline{\alpha_k} z}\right).$$

Преобразуем сумму двух последних слагаемых в представлении $\psi_n(z)$

$$z\rho_n'(z)+z^2\rho_n''(z)=z\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\alpha_k}{(z-\alpha_k)^2}+\frac{\overline{\alpha_k}}{(1-\overline{\alpha_k}z)^2}+\frac{2\alpha_k z}{(z-\alpha_k)^3}+\frac{2\overline{\alpha_k}^2 z}{(1-\overline{\alpha_k}z)^3}\right)=$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{Re}\left(\alpha_k^2\overline{z}^2\right)-|\alpha_k|^2\,\mathrm{Re}\left(\alpha_k^2\overline{z}^2\right)+\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})-|\alpha_k|^4\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})-3|\alpha_k|^2+3|\alpha_k|^4}{\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^3}=$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)\left(\mathrm{Re}\left(\alpha_k^2\overline{z}^2\right)+\left(1+|\alpha_k|^2\right)\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})-3|\alpha_k|^2\right)}{\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^3}.$$

Видно, что данная сумма принимает действительные значения при $|z|=1$, то же можно сказать и о $\rho_n(z)$, поэтому и функция $\psi_n(z)$ при $|z|=1$ принимает действительные значения. Представим $\psi_n(z)$ в виде

$$\psi(z)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\rho_n^3(z)+\frac{1}{2}\rho_n^3(z)+\rho_n(z)-z\rho_n'(z)-z^2\rho_n''(z)\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\rho_n^3(z)+S_1\right). \qquad (1)$$

Оценим сумму S_1

$$S_1>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)^3}{\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2}-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)\left(\mathrm{Re}\left(\alpha_k^2\overline{z}^2\right)+\left(1+|\alpha_k|^2\right)\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})-3|\alpha_k|^2\right)}{\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^3}\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-|\alpha_k|\right)^2\left(1+|\alpha_k|\right)^2+\left(1-|\alpha_k|\right)^4-2\left(|\alpha_k|^2+\left(1+|\alpha_k|^2\right)|\alpha_k|-3|\alpha_k|^2\right)\right)}{\left(1+|\alpha_k|\right)^6}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)\left(1-|\alpha_k|\right)^2\left(\frac{3}{2}|\alpha_k|^2-3|\alpha_k|+\frac{3}{2}\right)}{\left(1+|\alpha_k|\right)^6}=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)\left(1-|\alpha_k|\right)^4}{\left(1+|\alpha_k|\right)^6}>0.$$

Подставляя данное соотношение в (1), получим первое неравенство в утверждении леммы.

Оценивая $\psi_n(z)$ аналогично S_1, можно получить соотношение

$$\psi_n(z)>\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)\left(2\left(1-|\alpha_k|\right)^2\left(1+|\alpha_k|\right)^2+\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^2\right)}{\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^3}-$$

$$-\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)\left(\mathrm{Re}\left(\alpha_k^2\overline{z}^2\right)+\left(1+|\alpha_k|^2\right)\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})-3|\alpha_k|^2\right)}{\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^3}=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-|\alpha_k|^2\right)S_2}{\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^3},$$

где

$$S_2=2\left(1-|\alpha_k|^2\right)^2+\left(1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2\right)^2-2\left(\mathrm{Re}\left(\alpha_k^2\overline{z}^2\right)+\left(1+|\alpha_k|^2\right)\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})-3|\alpha_k|^2\right).$$

Для доказательства второго неравенства леммы достаточно при $z=e^{iu}$ установить справедливость соотношений

$$S_2\geq 1-2\,\mathrm{Re}(\alpha_k\overline{z})+|\alpha_k|^2=\left(1-|\alpha_k|\right)^2+4|\alpha_k|\sin^2\frac{u-\arg\alpha_k}{2}.$$

Действительно, с одной стороны,

$$S_2 - \left(1-2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar z)+|\alpha_k|^2\right) = 2\left(1-|\alpha_k|^2\right)^2 + \left(1-2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar z)+|\alpha_k|^2\right)^2 -$$

$$-2\operatorname{Re}\left(\alpha_k^2 \bar z^2\right) - 2|\alpha_k|^2 \operatorname{Re}(\alpha_k \bar z) + 5|\alpha_k|^2 - 1 \geq$$

$$\geq 2\left(1-|\alpha_k|^2\right)^2 + \left(1-|\alpha_k|\right)^4 - 2|\alpha_k|^2 - 2|\alpha_k|^3 + 5|\alpha_k|^2 - 1 = \left(1-|\alpha_k|\right)^2 \left(3|\alpha_k|+2\right)^2 > 0,$$

и, с другой стороны,

$$1-2\operatorname{Re}(\alpha_k \bar z)+|\alpha_k|^2 = \left(1-|\alpha_k|\right)^2 + 2|\alpha_k|\left(1-\cos(u-\arg\alpha_k)\right) = \left(1-|\alpha_k|\right)^2 + 4|\alpha_k|\sin^2\frac{u-\arg\alpha_k}{2},$$

и тем самым доказательство леммы закончено.

Назовем функцию $\varphi(u)\in C_{2\pi}$ простой, если она абсолютно непрерывна, равна нулю на дополнении отрезка $[a,b]$, $b-a\leq 2\pi$, называемого опорным, к отрезку $\left[(a+b)/2-\pi,\ (a+b)/2+\pi\right]$, и $\|\varphi'\|_{L_\infty} \leq (b-a)^{-1}$.

Лемма 2. *Если $f(u)=\varphi_1(u)+\varphi_2(u)$, где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ – простые функции с опорными отрезками $[\theta_1-d_1,\theta_1+d_1]$ и $[\theta_2-d_2,\theta_2+d_2]$, $(\theta_2+d_2)-(\theta_1+d_1)\leq 2\pi$, $\theta_2-d_2\geq\theta_1+d_1$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ справедлива оценка*

$$|f(u)-D_{4n-2}(u,f)| \leq \sum_{l=1}^{2}\left(\frac{\dfrac{9}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}}\left(1-\left(1-\dfrac{d_l}{\pi}\right)^2\right)}{\dfrac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\dfrac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\dfrac{u-\theta_l}{2}} + \frac{\dfrac{300}{\Psi_n(u)}\left(1-\left(1-\dfrac{d_l}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\dfrac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\dfrac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\dfrac{u-\theta_l}{2}\right)^2}\right).$$

Доказательство. Выберем параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ следующим образом:

1) $\alpha_1 = (1-d_1/\pi)\,e^{i\theta_1}$, $\alpha_2 = (1-d_2/\pi)\,e^{i\theta_2}$;

2) остальные параметры лежат на лучах $\arg z=\theta_1$, $\arg z=\theta_2$ и $0\leq|\alpha_k|<1$, $k=\overline{3,n}$.

Пусть

$$E_u = \left\{ j \mid j=\overline{1..2n}, |u-u_j| < \frac{1}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \right\}, \quad CE_u = \{1,2,..2n\} \setminus E_u.$$

Если $u\in[\theta_1-10d_1,\theta_1+10d_1]\cup[\theta_2-10d_2,\theta_2+10d_2]$, то с учетом определения простой функции, свойств оператора D_{4n-2} и неравенства Коши-Буняковского для $l=1,2$ будем иметь

$$|\varphi(u)-D_{4n-2}(u,f)| \leq \frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{E_u}\frac{1}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}}\,\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\Phi_n'(u_j)\sin^4\dfrac{u-u_j}{2}} +$$

$$+\frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{CE_u}\frac{\pi}{2d_l}\,\frac{\left|\sin^3\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)\right|}{\Phi_n'(u_j)\sin^3\dfrac{|u-u_j|}{2}} \leq \frac{1}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} + \tag{2}$$

$$+\frac{\pi\sqrt{\Phi_n'(u)}}{2d_l\sqrt{\Psi_n(u)}}\sqrt{\sum_{j=1}^{2n}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\Psi_n(u)\Phi_n'(u_j)\sin^4\dfrac{u-u_j}{2}}}\sqrt{\sum_{j=1}^{2n}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\Phi_n'(u)\Phi_n'(u_j)\sin^2\dfrac{u-u_j}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} = \frac{\pi\sqrt{2}+1}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}}.$$

С учетом оценки

$$\frac{1}{d_l}=\frac{1}{\pi}\frac{\frac{d_l}{\pi}}{\frac{d_l^2}{\pi^2}} \le \frac{1}{\pi^3}\left(100+\frac{1}{\pi^2}\right)\frac{\frac{2d_l}{\pi}-\frac{d_l^2}{\pi^2}}{\frac{d_l^2}{\pi^2}+100d_l^2} \le \frac{1}{\pi^3}\left(100+\frac{1}{\pi^2}\right)\frac{1-\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}}$$

неравенство (2) при $u\in\ \theta_1-10d_1,\theta_1+10d_1\ \cup\ \theta_2-10d_2,\theta_2+10d_2$ можно переписать в виде

$$\left|f(u)-D_{4n-2}(u,f)\right|<\frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}}\sum_{l=1}^{2}\frac{1-\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}}. \tag{3}$$

Из определения простой функции видно, что ее модуль не превышает $1/2$, поэтому при $u\notin\ \theta_1-10d_1,\theta_1+10d_1\ \cup\ \theta_2-10d_2,\theta_2+10d_2$ установим, что

$$\begin{aligned}\left|\varphi(u)-D_{4n-2}(u,f)\right| &= \frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\left|f(u_j)\right|}{\Phi_n'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\ \Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}}< \\ &< \frac{1}{2\Psi_n(u)}\sum_{l=1}^{2}\sum_{\theta_l-d_l<u_j<\theta_l+d_l}\frac{25}{\Phi_n'(u_j)\left(\left(\frac{1}{81}+\frac{400}{81}\right)\sin^2\frac{u-u_j}{2}\right)^2}< \\ &< \frac{1}{2\Psi_n(u)}\sum_{l=1}^{2}\sum_{\theta_l-d_l<u_j<\theta_l+d_l}\frac{25}{\Phi_n'(u_j)\left(\frac{u-u_j\ ^2}{81\pi^2}+\frac{400}{81}\sin^2\frac{9\ u-\theta_l}{20}\right)^2}< \\ &< \frac{1}{2\Psi_n(u)}\sum_{l=1}^{2}\frac{25}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}\right)^2}\sum_{\theta_l-d_l<u_j<\theta_l+d_l}\frac{1}{\Phi_n'(u_j)}.\end{aligned} \tag{4}$$

При $x\in\ \theta_l-d_l,\theta_l+d_l\ ,\ l=1,2$ имеем

$$\Phi_n'(x)>\frac{1-\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{x-\theta_l}{2}}\ge\frac{\frac{d_l}{\pi}}{\frac{d_l^2}{\pi^2}+d_l^2}=\frac{\pi}{1+\pi^2\ d_l}. \tag{5}$$

Так как все параметры $\alpha_k\ {}_{k=1}^{n}$ лежат на лучах $\arg z=\theta_1, \arg z=\theta_2$, функция $\Phi_n'(x)$ имеет локальные максимумы в точках θ_1 и θ_2, локальные минимумы в некоторых точках τ_1 и τ_2, где $\tau_1<\theta_1,\ \theta_1<\tau_2<\theta_2$, причем $\Phi_n'(x)$ монотонна на каждом из отрезков $\tau_1,\theta_1\ ,\ \theta_1,\tau_2\ ,\ \tau_2,\theta_2\ ,\ \theta_2,\tau_1+2\pi$. Из определения функции $\Phi_n(x)$ и расположения точек u_j понятно, что $\Phi_n(u_{j+1})-\Phi_n(u_j)=\pi,\ j=\overline{1,2n-1}$, с учетом этого при оценке последней суммы в (4) на промежутках убывания $\Phi_n'(x)$ будем заменять единицу на $\Phi_n'(\xi_j)\ u_{j+1}-u_j\ /\pi$, на промежутках возрастания – на $\Phi_n'(\zeta_j)\ u_j-u_{j-1}\ /\pi,\ \xi_j\in[u_j,u_{j+1}],\ \zeta_j\in[u_{j-1},u_j]$. Отношения $\Phi_n'(\zeta_j)/\Phi_n'(u_j),\ \Phi_n'(\xi_j)/\Phi_n'(u_j)$ будут ограничены в силу монотонности $\Phi_n'(x)$, для оценки же слагаемых, соответствующих ближайшим u_j к τ_1 и τ_2, воспользуемся (5)

$$\sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{1}{\Phi_n'(u_j)} \le \sum \frac{\Phi_n'(\zeta_j)\ \ u_j - u_{j-1}}{\pi \Phi_n'(u_j)} + \sum \frac{\Phi_n'(\xi_j)\ \ u_{j+1} - u_j}{\pi \Phi_n'(u_j)} + \frac{2\ \ 1+\pi^2\ \ d_l}{\pi} \le$$

$$\le \frac{2d_l}{\pi} + \frac{2\ \ 1+\pi^2\ \ d_l}{\pi} < \frac{24 d_l}{\pi}.$$

Подставляя данную оценку в (4) , получим

$$\left|\varphi(u) - D_{4n-2}(u,\varphi)\right| < \frac{300}{\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^{2} \frac{\dfrac{d_l}{\pi}}{\left(\dfrac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \dfrac{d_l}{\pi}\right)\sin^2 \dfrac{u-\theta_l}{2}\right)^2} \le \frac{300}{\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^{2} \frac{1 - \left(1 - \dfrac{d_l}{\pi}\right)^2}{\left(\dfrac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \dfrac{d_l}{\pi}\right)\sin^2 \dfrac{u-\theta_l}{2}\right)^2},$$

откуда в совокупности с (3) и следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Если* $f(u) = \sum_{k=1}^{n}\ a_k\varphi_k(u) + b_k\psi_k(u)$ *, где* $a_k, b_k \ge 0$*,* $\varphi_k(u)$ *и* $\psi_k(u)$ *– простые функции с опорными отрезками* $\theta_1 - c_k, \theta_1 + c_k$ *и* $\theta_2 - d_k, \theta_2 + d_k$ *соответственно, причем для каждой четверки* $\theta_1, \theta_2, c_k, d_k,\ k = \overline{1,n}$ *выполнены условия леммы 2, то существует такой набор параметров* $\alpha_k\ {}_{k=1}^{m}$*,* $m \le 4n$*, что для определяемого ими оператора* D_{4m-2} *выполняется неравенство*

$$\left|f(u) - D_{4m-2}(u,f)\right| < \frac{459}{n} \max\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k=1}^{n} b_k\right\}.$$

Доказательство. Пусть $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,\ S_n = \max\ A_n, B_n$. Оператор D_{4m-2} будем строить по системе параметров

$$\alpha_{k,i,1} = \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) e^{i\theta_1},\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1, \left[\frac{a_k}{A_n} n\right] + 1},$$

$$\alpha_{k,i,2} = \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) e^{i\theta_2},\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1, \left[\frac{b_k}{B_n} n\right] + 1}.$$

Их количество удовлетворяет соотношению

$$m = \sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{a_k}{A_n} n\right] + \left[\frac{b_k}{B_n} n\right] + 2\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A_n} n + \frac{b_k}{B_n} n + 2\right) = \frac{A_n}{A_n} n + \frac{B_n}{B_n} n + 2n = 4n.$$

В силу леммы 2 и линейности оператора D_{4m-2} для его уклонения от $f(u)$ будем иметь

$$\left|f(u) - D_{4n-2}(u,f)\right| < \frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_m(u)}} \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \frac{1 - \left(1 - \dfrac{c_k}{\pi}\right)^2}{\dfrac{c_k^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \dfrac{c_k}{\pi}\right)\sin^2 \dfrac{u-\theta_1}{2}} + b_k \frac{1 - \left(1 - \dfrac{d_k}{\pi}\right)^2}{\dfrac{d_k^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \dfrac{d_k}{\pi}\right)\sin^2 \dfrac{u-\theta_2}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{300}{\Psi_m(u)} \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \frac{1 - \left(1 - \dfrac{c_k}{\pi}\right)^2}{\left(\dfrac{c_k^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \dfrac{c_k}{\pi}\right)\sin^2 \dfrac{u-\theta_1}{2}\right)^2} + b_k \frac{1 - \left(1 - \dfrac{d_k}{\pi}\right)^2}{\left(\dfrac{d_k^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \dfrac{d_k}{\pi}\right)\sin^2 \dfrac{u-\theta_2}{2}\right)^2}\right). \tag{6}$$

Из леммы 1 следуют соотношения

$$\sqrt[3]{\Psi_m(u)} \ge \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\left[\frac{a_k}{A_n}n\right]+1\right)\left(1-\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)^2\right)}{\frac{c_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_1}{2}}+\frac{\left(\left[\frac{b_k}{B_n}n\right]+1\right)\left(1-\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)^2\right)}{\frac{d_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_2}{2}}\right) \ge$$

$$\ge \frac{n}{S_n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{1-\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)^2}{\frac{c_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_1}{2}}+b_k\frac{1-\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)^2}{\frac{d_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_2}{2}}\right), \tag{7}$$

$$\Psi_m(u) \ge \frac{2n}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{a_k}{A_n}\left(1-\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{c_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_1}{2}\right)^2}+\frac{\frac{b_k}{B_n}\left(1-\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{d_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_2}{2}\right)^2}\right) \ge$$

$$\ge \frac{2n}{3S_n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{1-\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{c_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_1}{2}\right)^2}+b_k\frac{1-\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{d_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_2}{2}\right)^2}\right). \tag{8}$$

Подставляя оценки (7) и (8) в (6), получим

$$\left|D_{4m-2}(u,f)-f(u)\right| < \frac{9\max\{A_n,B_n\}}{n}+\frac{450\max\{A_n,B_n\}}{n}=\frac{459\max\{A_n,B_n\}}{n},$$

и доказательство леммы закончено.

Теорема 1. *Если* $f(u)\in C_{2\pi}$ *четная, выпуклая вниз на отрезке* $[0,\pi]$ *и* $\inf\limits_{0\le u<2\pi} f(u)=0$*, то при подходящем выборе параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$, $m\le 4n-4$ *справедливо порядковое равенство*

$$\left\|f(u)-D_{4m-2}(u,f)\right\|=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Через $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{v_k\}_{k=1}^{n}$, $0\le u_k,v_k\le 2\pi,\ k=\overline{1,n}$ обозначим абсциссы точек, для которых $f(u_k)=\frac{f(0)k}{n}$ и $f(v_k)=\frac{f(\pi)k}{n}$. Рассмотрим четную 2π-периодическую ломаную $\varphi(u)$ с вершинами в точках $\left(\pm u_k,\ f(u_k)-\frac{f(0)k}{n}\right),\ k=\overline{1,n}$ и $\left(\pm(\pi-v_k),\ f(v_k)-\frac{f(\pi)k}{n}\right),\ k=\overline{1,n}.$ Для $u\in[-v_1,-u_1]\cup[u_1,v_1]$ положим $\varphi(u)=0.$ Очевидно неравенство

$$\left\|f(u)-\varphi(u)\right\|\le\frac{\|f\|}{n}. \tag{9}$$

Ломаную $\varphi(u)$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k\varphi_k(u)+b_k\psi_k(u)\right),\quad a_k,b_k>0,\quad \sum_{k=1}^{n-1}a_k\le 2f(0),\quad \sum_{k=1}^{n-1}b_k\le 2f(\pi) \tag{10}$$

простых треугольных функций $\varphi_k(u)=\max\{0,1-|u|/u_k\}/2$, $\psi_k(u)=\max\{0,1-|u-\pi|/(\pi-v_k)\}/2$, поэтому согласно лемме 3 и (10) существует оператор D_{4m-2}, $m\le 4n-4$, для которого справедливо неравенство

$$\left\|\varphi(u)-D_{4m-2}(u,\varphi)\right\|\le\frac{918\|f\|}{n}. \tag{11}$$

Для уклонения этого оператора от функции $f(u)$ с учетом (9) и (11) будем иметь

$$\|f(u)-D_{4m-2}(u,f)\| \le \|f(u)-\varphi(u)\| + \|\varphi(u)-D_{4m-2}(u,\varphi)\| + \|D_{4m-2}(u,\varphi)-D_{4m-2}(u,f)\| \le$$
$$\le \frac{\|f\|}{n} + \frac{918\|f\|}{n} + \|D_{4m-2}(u,f-\varphi)\| \le \frac{919\|f\|}{n} + \|D_{4m-2}\| \cdot \|f(u)-\varphi(u)\| = \frac{920\|f\|}{n},$$

и, таким образом, теорема доказана.

Замечание. Если $f(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и монотонна на отрезке $[0,\pi]$, то для построения оператора D_{4m-2} достаточно взять параметры $(\alpha_k)_{k=1}^{m}$ только на интервале $(0,1)$, если $f(u)$ невозрастающая, или только на интервале $(-1,0)$, если $f(u)$ неубывающая, соответственно степень оператора $4m-2,\ m \le 2n-2$.

Теорема 2. *Если $f(u) \in C_{2\pi}$ четная и выпуклая на отрезке $[0,\pi]$, то при подходящем выборе параметров $(\alpha_k)_{k=1}^{m}$, $m \le 4n-4$ будет иметь место порядковая оценка*

$$\|f(u)-D_{4m-2}(u,f)\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Любая функция $f(u)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2, может быть представлена в виде $f(u)=c+g(u)$ или $f(u)=c-g(u)$, где c – некоторая константа, а $g(u)$ – функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2. Согласно теореме 1 существует оператор D_{4m-2}, $m \le 4n-4$ такой, что $\|g(u)-D_{4m-2}(u,g)\| = O(n^{-1})$. Тогда с учетом линейности и точности оператора на константах будем иметь

$$\|f(u)-D_{4m-2}(u,f)\| = \|c \pm g(u) - D_{4m-2}(u,c) \mp D_{4m-2}(u,g)\| = \|g(u)-D_{4m-2}(u,g)\| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и теорема 2 доказана.

В качестве следствия из теоремы 2 может быть получен результат В. А. Попова и П. П. Петрушева о порядке приближения непрерывных на отрезке выпуклых функций алгебраическими рациональными функциями степени не выше n.

Следствие. *Пусть $f(x) \in C_{[0,1]}$ и выпуклая. Тогда*

$$R_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лемма 4. *Если $f(u) \in C_{2\pi}$ четная, выпуклая вниз (вверх) и неубывающая (невозрастающая) на отрезке $[0,\pi/2]$, и $f(\pi/2-u) = f(\pi/2+u),\ u \in [0,\pi]$, то при подходящем выборе параметров $(\alpha_k)_{k=1}^{m}$, $m \le 4n-4$ будет справедливо порядковое равенство*

$$\|f(u)-D_{4m-2}(u,f)\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Для доказательства леммы необходимо провести рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теорем 2 и 3 с той лишь разницей, что параметры $(\alpha_k)_{k=1}^{m}$ нужно расположить на лучах $\arg z = -\pi/2$ и $\arg z = \pi/2$, а ломаную $\varphi(u)$ строить по простым треугольным функциям, середины опорных отрезков которых находятся в точках $-\pi/2$ и $\pi/2$.

Доказательство следствия. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ непрерывна, выпукла вниз и не возрастает. Рассмотрим функцию $f(\cos u),\ u \in [0,\pi/2]$. Так как

$$(f(\cos u))' = -f'(\cos u)\sin u, \quad (f(\cos u))'' = f''(\cos u)\sin^2 u - f'(\cos u)\cos u,\ f'(\cos u) \le 0,\ f''(\cos u) \ge 0,$$

то $(f(\cos u))' \ge 0$, $(f(\cos u))'' \ge 0$, поэтому можно определить функцию $\varphi(u)$, совпадающую с $f(\cos u)$ на отрезке $[0,\pi/2]$ и удовлетворяющую условиям леммы 4. Согласно теореме 2 существует оператор D_{4m-2}, $m \le 4n-4$ такой, что $\|\varphi(u)-D_{4m-2}(u,\varphi)\| = O(n^{-1})$.

$D_{4m-2}(u,\varphi)$ – четная тригонометрическая рациональная функция, поэтому представима в виде $D_{4m-2}(u,\varphi) = r_{4m-2}(\cos u)$, где $r_{4m-2}(x)$ – алгебраическая рациональная функция степени не выше $4m-2$, значит,

$$\|\varphi(u) - r_{4m-2}(\cos u)\| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и, следовательно,

$$\| f(x) - r_{4m-2}(x)\|_{0,1} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогичным образом данное соотношение устанавливается для произвольных монотонных выпуклых на отрезке функций.

Любая немонотонная выпуклая на отрезке функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы двух монотонных выпуклых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Пусть $\bar{r}_{4m-2}(x)$ и $\tilde{r}_{4m-2}(x)$ такие рациональные функции, что

$$\| f_1(x) - \bar{r}_{4m-2}(x)\|_{0,1} = O\left(\frac{1}{n}\right),\ \| f_2(x) - \tilde{r}_{4m-2}(x)\|_{0,1} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и $r_{8m-4}(x) = \bar{r}_{4m-2}(x) + \tilde{r}_{4m-2}(x)$ – рациональная функция степени не выше $8m-4$. В таком случае

$$\| f(x) - r_{8m-4}(x)\|_{0,1} = \| f_1(x) - \bar{r}_{4m-2}(x) + f_2(x) - \tilde{r}_{4m-2}(x)\|_{0,1} \le$$

$$\le \| f_1(x) - \bar{r}_{4m-2}(x)\|_{0,1} + \| f_2(x) - \tilde{r}_{4m-2}(x)\|_{0,1} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда и следует утверждение следствия.

В заключение заметим, что аппроксимация линейных комбинаций простых функций интегральными рациональными операторами и ее приложения к нахождению порядковых оценок для наилучших рациональных приближений исследовались А. А. Пекарским [7]. В. Н. Русак и И. В. Рыбаченко [8] использовали линейные комбинации простых функций для приближения сумматорными рациональными операторами выпуклых функций пространства C_∞.

Литература

1. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1979.
2. Ровба Е.А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно: ГрГУ, 2001.
3. Ровба Е.А. Сумматорные рациональные операторы типа Джексона // Мат. заметки. 1997. Т. 61, №6. С. 18-22.
4. Гриб Н.В. Аппроксимация сумматорными рациональными операторами типа Джексона в пространстве непрерывных 2π-периодических функций // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. №1. – С. 17-24.
5. Буланов А.П. О порядке приближения выпуклых функций рациональными функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33, №5. С. 1132-1148.
6. Попов В.А., Петрушев П.П. Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями // Мат. сборник. 1977. Т. 103, №6. С. 285-292.
7. Пекарский А.А. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Мат. сборник. 1987. Т. 133, №1. С. 86-102.
8. Русак В.Н., Рыбаченко И.В. Свойства функций и приближение сумматорными рациональными операторами на действительной оси. // Мат. заметки. 2004. Т. 76. №1. С. 111-118.