УДК 517.53

Н.В. ГРИБ

АППРОКСИМАЦИЯ СУММАТОРНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка

Интегральные рациональные операторы типа Джексона на прямой и окружности впервые были построены В.Н. Русаком [1]. Е.А. Ровба построил аналогичные операторы сумматорного типа для прямой [2], случай же окружности до сих пор не был исследован (см., например, [3, с. 281]). В настоящей работе построены сумматорные рациональные операторы типа Джексона на окружности, исследуется сходимость задаваемых ими последовательностей рациональных функций к непрерывным 2π-периодическим функциям и 2π-периодическим гельдеровским функциям ограниченной вариации.

Для заданной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, $0 \le |\alpha_k| < 1$ соответствующее произведение Бляшке имеет вид

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}.$$

Если точку z повернуть вдоль единичной окружности на угол 2π, то $\arg \pi_n^2(z)$ изменится на $4\pi n$, непрерывно возрастая. Поэтому уравнение $\pi_n^2(z)-1=0$ имеет $2n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}$, $j=\overline{1,2n}$, расположенных на окружности $|z|=1$.

В пространстве $C(L)$ непрерывных на единичной окружности функций введем сумматорный рациональный оператор типа Джексона

$$D_{4n-2}(z,f) = \frac{1}{\psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n^2(z,z_j)}{\rho_n(z_j)} f(z_j), \tag{1}$$

где

$$\rho_n(z) = z\sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\bar{\alpha}_k z)(z-\alpha_k)}, \quad K_n(z,\xi) = \left(\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)} - 2\right)\frac{z\xi}{(z-\xi)^2},$$

$$\psi_n(z) = \frac{2}{3}\left(2\rho_n^3(z) + \rho_n(z) - z\rho_n'(z) - z^2\rho_n''(z)\right).$$

Непосредственно проверяется, что D_{4n-2} – положительный оператор, значениями которого являются тригонометрические рациональные функции степени не выше $4n-2$.
Введем также обозначения

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu}), \quad \Psi_n(u) = \psi_n(e^{iu}). \tag{2}$$

Без доказательства приведем ряд лемм, необходимых нам ниже.

Лемма 1. *Если* $z=e^{iu}$, $\xi = e^{iv}$, *то справедливо равенство*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(v)-\Phi_n(u)\right)}{\sin^4 \frac{v-u}{2}} dv = \oint_{|\xi|=1} K_n^2(z,\xi)\frac{d\xi}{i\xi} = \pi\psi_n(z).$$

Лемма 2. *Оператор* $D_{4n-2}(z,f)$ *является точным на константах.*

Лемма 3. *При* $|z|=1$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n(z,z_j)}{\rho_n(z_j)} = 1.$$

Лемма 4. *Имеют место соотношения*

$$\Psi_n(u) > \left(\Phi_n'(u)\right)^3,$$

$$\Psi_n(u) > \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(\left(1-|\alpha_k|\right)^2 + 4|\alpha_k|\sin^2\frac{u-\arg\alpha_k}{2}\right)^2}.$$

Теперь получим другое представление оператора D_{4n-2}. Из (2) находим $e^{i\Phi_n(u)} = \pi_n(e^{iu})$. Продифференцируем обе части по u

$$ie^{i\Phi_n(u)}\Phi_n{}'(u) = \pi_n{}'(e^{iu})ie^{iu}.$$

С учетом соотношения

$$\pi_n{}'(z) = \sum_{k=1}^{n}\pi_n(z)\frac{1-\overline{\alpha}_k z}{z-\alpha_k}\left(\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z}\right)' = \pi_n(z)\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\overline{\alpha}_k z)(z-\alpha_k)} = \frac{\pi_n(z)\rho_n(z)}{z}$$

будем иметь

$$\Phi_n{}'(u) = \frac{\pi_n{}'(e^{iu})e^{iu}}{\pi_n(e^{iu})} = \rho_n(e^{iu}). \tag{3}$$

При $z = e^{iu}$, $z_j = e^{iu_j}$, $f(e^{iu}) = \varphi(u)$ из (1), (3) и леммы 1 получим

$$D_{4n-2}(u,\varphi) = \frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\varphi(u_j)}{\Phi_n'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если* $\varphi(u) \in C_{2\pi}$, *то имеет место неравенство*

$$\left|D_{4n-2}(u,\varphi) - \varphi(u)\right| \le \left(1+\pi\sqrt{2}\right)\omega\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-1}\right),$$

где $\omega(\delta)$ *– модуль непрерывности функции* $\varphi(u)$.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$E = \left\{ j \mid j = \overline{1..2n}, \left|u-u_j\right| < \left(\Phi_n'(u)\right)^{-1}\right\}, \quad CE = \{1,2,..2n\}\setminus E.$$

Тогда с учетом определения модуля непрерывности для уклонения функции $\varphi(u)$ от оператора $D_{4n-2}(u,\varphi)$ будем иметь

$$\left|\varphi(u) - D_{4n-2}(u,\varphi)\right| = \frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\left|\varphi(u_j)-\varphi(u)\right|}{\Phi_n{}'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{j\in E}\frac{\omega\left(\left|u-u_j\right|\right)}{\Phi_n{}'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}} +$$

$$+\frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{j\in CE}\frac{\omega\left(\left|u-u_j\right|\right)}{\Phi_n{}'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}} = S_1 + S_2.$$

Воспользовавшись неравенством $\omega\left(\left|u-u_j\right|\right) \le \omega\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-1}\right)\left(\left|u-u_j\right|\Phi_n'(u)+1\right)$, получим

$$S_1 + S_2 \le \frac{\omega\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-1}\right)}{\Psi_n(u)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{\Phi_n'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}} +$$

$$+\frac{\omega\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-1}\right)\Phi_n'(u)}{\Psi_n(u)}\sum_{j\in CE}\frac{\left|u-u_j\right|}{\Phi_n'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}} =$$

$$= \omega\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-1}\right)\left(1+\frac{\Phi_n'(u)}{\Psi_n(u)}\sum_{j\in CE}\frac{|u-u_j|}{\Phi_n'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}}\right)\le$$

$$\le \omega\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-1}\right)\left(1+\frac{\pi\Phi_n'(u)}{\Psi_n(u)}\sum_{j\in CE}\frac{\left|\sin^3\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)\right|}{\Phi_n'(u_j)\left|\sin^3\frac{u-u_j}{2}\right|}\right)=\omega\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-1}\right)\left(1+S_3\right). \qquad (5)$$

К сумме S_3 применим неравенство Коши-Буняковского и воспользуемся леммами 2 – 4

$$S_3=\frac{\pi\Phi_n'(u)}{\Psi_n(u)}\sum_{j\in CE}\left(\frac{\left|\sin\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)\right|}{\sqrt{\Phi_n'(u_j)}\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|}\right)\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sqrt{\Phi_n'(u_j)}\sin^2\frac{u-u_j}{2}}\right)\le$$

$$\le\frac{\pi\left(\Phi_n'(u)\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Psi_n(u)}}\sqrt{\sum_{j=1}^{2n}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\Psi_n(u)\Phi_n{}'(u_j)\sin^4\frac{u-u_j}{2}}}\sqrt{\sum_{j=1}^{2n}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\Phi_n'(u)\Phi_n'(u_j)\sin^2\frac{u-u_j}{2}}}=$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}\left(\Phi_n'(u)\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Psi_n(u)}}\le\frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{\Psi_n(u)}}{\sqrt{\Psi_n(u)}}=\pi\sqrt{2}.$$

Подставив данное выражение в (5), получим утверждение теоремы 1.

Следствие 1. *Если* $\varphi(u)\in C_{2\pi}$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-|\alpha_k|\right)=\infty$, *то последовательность рациональных функций* $D_{4n-2}(u,\varphi)$ *равномерно сходится к функции* $\varphi(u)$ *на отрезке* $[0,2\pi]$.

Это следствие верно в силу оценки при $|z|=1$

$$\Phi_n'(u)=e^{iu}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\bar{\alpha}_k e^{iu})(e^{iu}-\alpha_k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1+|\alpha_k|^2-2|\alpha_k|\cos(u-\arg\alpha_k)}\ge$$

$$\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(1+|\alpha_k|\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|}{1+|\alpha_k|}>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(1-|\alpha_k|\right)\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

Следствие 2. *Если* $\varphi(u)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$|\varphi(u')-\varphi(u'')|\le M\,|u'-u''|^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1,$$

то имеет место неравенство

$$\left|D_{4n-2}(u,\varphi)-\varphi(u)\right|\le\frac{M\left(1+\pi\sqrt{2}\right)}{\left(\Phi_n'(u)\right)^{\alpha}}.$$

Следствие вытекает из свойств модуля непрерывности.

Обозначим через $VH_{2\pi}^{\alpha}$ класс функций из пространства $C_{2\pi}$, имеющих ограниченную вариацию на отрезке $[0,2\pi]$, $V_0^{2\pi}[\varphi]\le 1$, и удовлетворяющих условию Липшица $Lip\,\alpha,\ 0<\alpha<1$. Рациональные равномерные приближения таких функций изучались Е. П. Долженко и А. А. Абдугаппаровым (см., например, [4]), Г. Фройдом [5], А. П. Булановым [6]. В случае отрезка окончательный результат принадлежит А. А. Пекарскому [7] и П. П. Петрушеву [8], в периодичском случае – А. А. Пекарскому [9]. Он состоит в том, что наилучшие равномерные рациональные приближения гельдеровских функций ограниченной вариации имеют порядок $\ln n/n$.

Теорема 2. *Если* $\varphi\in VH_{2\pi}^{\alpha}$, *то при подходящем выборе параметров* $\{\alpha_k\}_1^n$ *справедлива оценка*

$$\left\| D_{4n-2}(u,\varphi)-\varphi(u)\right\| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Опишем выбор параметров $\left\{\alpha_k\right\}_1^n$, на котором реализуется оценка теоремы. Для каждого фиксированного $n\in \mathbb{N}$ определим числа

$$\delta_n^1=\left(\frac{4\ln^2 n}{\alpha^2 n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ \ N_1=\left[\frac{\ln^2 n}{\alpha^2}+1\right],\ \ \delta_n^2=\left(\frac{4\ln n}{\alpha^2 n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ \ N_2=\left[\frac{\ln n}{\alpha^2}+1\right]. \qquad (6)$$

Построим разбиение отрезка $[0,2\pi]$ точками $\left\{\tau_j\right\}_0^{m_2}$, $0=\tau_0<\tau_1<...<\tau_{m_2}=2\pi$ по правилу

$$\tau_k=\max\left\{\tau:\tau_{k-1}<\tau\le 2\pi, V_{\tau_{k-1}}^{\tau}[\varphi]\le\omega(\delta_n^2)\right\}.$$

Количество таких параметров, согласно (6), удовлетворяет условию

$$m_2\le\left[\frac{1}{\omega(\delta_n^2)}\right]+1=\left[\frac{\alpha^2 n}{4\ln n}\right]+1.$$

Построим также разбиение отрезка $[0,2\pi]$ точками $\left\{\theta_j\right\}_0^{m_1}$, объединяя по $[\ln n]$ отрезков, соответствующих первому разбиению. Тогда точки $\left\{\theta_j\right\}_0^{m_1}$ удовлетворяют условию

$$V_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}[\varphi]\le\omega(\delta_n^1)=\frac{4\ln^2 n}{\alpha^2 n},\ \ m_1\le\left[\frac{\alpha^2 n}{4\ln^2 n}\right]+1.$$

Будем называть точки $\left\{\theta_j\right\}_0^{m_1}$ и $\left\{\tau_j\right\}_0^{m_2}$ точками разбиения отрезка $[0,2\pi]$ соответственно первого и второго ранга.

Поскольку $\varphi(u)$ – 2π-периодическая функция, то можно считать, что вместе с разбиением отрезка $[0,2\pi]$ точками $\left\{\theta_j\right\}_0^{m_1}$ и $\left\{\tau_j\right\}_0^{m_2}$ происходит разбиение отрезка $[2\pi,4\pi]$ соответственно точками $\theta_{j+m_1}=\theta_j+2\pi,\ j=\overline{0,m_1}$, $\tau_{j+m_2}=\tau_j+2\pi,\ j=\overline{0,m_2}$, и разбиение отрезка $[-2\pi,0]$ точками $\theta_{j-m_1}=\theta_j-2\pi,\ j=\overline{1,m_1}$, $\tau_{j-m_2}=\tau_j-2\pi,\ j=\overline{0,m_2}$, причем для расширенного разбиения отрезка $[-2\pi,4\pi]$ сохраняются свойства первоначального разбиения отрезка $[0,2\pi]$.

На каждом луче $\arg z=\theta_k$ разместим N_1 точек $\alpha_k=\left(1-\rho^j\right)e^{i\theta_k}$, $k=\overline{0,m_1}$, $j=\overline{1,N_1}$, где $\rho=\exp\left(-1/\sqrt{N_1}\right)$. Разместим также $2m_2$ параметров $\left\{\alpha_k\right\}$ в точках $\left(1-\Delta\tau_k/2\pi\right)e^{i\tau_k}$, $k=\overline{1,m_2}$ и $\left(1-\Delta\tau_{k+1}/2\pi\right)e^{i\tau_k}$, $k=\overline{0,m_2-1}$, $\Delta\tau_k=\tau_k-\tau_{k-1}$, полагая кратность каждой точки равной N_2. Остальные параметры $\left\{\alpha_k\right\}$ принимаем равными 0, их количество удовлетворяет соотношению

$$n-(m_1+1)N_1-2m_2N_2\ge n-\left(\frac{\alpha^2 n}{4\ln^2 n}+2\right)\left(\frac{\ln^2 n}{\alpha^2}+1\right)-2\left(\frac{\alpha^2 n}{4\ln n}+1\right)\left(\frac{\ln n}{\alpha^2}+1\right)>\frac{n}{8}.$$

При указанном выборе параметров $\left\{\alpha_k\right\}_1^n$ имеет место

Лемма 5. *Выполняется асимптотическое равенство*

$$\Phi_n'(u)\asymp n+\ln n\sum_{k=0}^{m_1}\min\left\{\left|\sin^{-1}\frac{u-\theta_k}{2}\right|,n^{\frac{1}{\alpha}}\right\}+$$

$$+\ln n\sum_{k=1}^{m_2}\min\left\{\frac{1}{\Delta\tau_k},\Delta\tau_k\sin^{-2}\frac{u-\tau_k}{2}\right\}+\ln n\sum_{k=0}^{m_2-1}\min\left\{\frac{1}{\Delta\tau_{k+1}},\Delta\tau_{k+1}\sin^{-2}\frac{u-\tau_k}{2}\right\}.$$

Константы в нижней и верхней оценках $\Phi_n'(u)$ обозначим соответственно через C_* и C^*.

Лемма 6. *Если* $\tau_s\le u<v\le\tau_{s+1}$, $v-u<\tau_{s+1}-v$, *где* τ_s, τ_{s+1} *– подряд идущие точки разбиения второго ранга, то имеет место неравенство*

$$\frac{\Phi_n'(v)}{\Phi_n'(u)}<5.$$

Доказательство леммы 6. Пусть $\Phi'_{n,1}(u)$ – сумма тех слагаемых, для которых $u-\pi \le \arg\alpha_k < u$, соответственно $\Phi'_{n,2}(u)$ – сумма слагаемых, для которых $u < \arg\alpha_k < u+\pi$. Очевидно, $\Phi'_{n,1}(u) > \Phi'_{n,1}(v)$, поэтому

$$\frac{\Phi'_n(v)}{\Phi'_n(u)} = \frac{\Phi'_{n,1}(v)+\Phi'_{n,2}(v)}{\Phi'_{n,1}(u)+\Phi'_{n,2}(u)} < \frac{\Phi'_{n,1}(v)+\Phi'_{n,2}(v)}{\Phi'_{n,1}(v)+\Phi'_{n,2}(u)} < 1+\frac{\Phi'_{n,2}(v)}{\Phi'_{n,2}(u)}. \tag{7}$$

Во второй сумме на основании условия леммы $u-\arg\alpha_k < 2\left(v-\arg\alpha_k\right)$, значит

$$\Phi'_{n,2}(u) > \sum \frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(1-|\alpha_k|\right)^2+16|\alpha_k|\sin^2\dfrac{v-\arg\alpha_k}{2}} > \frac{1}{4}\sum \frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(1-|\alpha_k|\right)^2+4|\alpha_k|\sin^2\dfrac{v-\arg\alpha_k}{2}}.$$

Подставляя полученное соотношение в (7), получим утверждение леммы 6.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u \in \left[\theta_\nu, \theta_{\nu+1}\right]$ при некотором ν, $0 \le \nu \le m_1$. Пусть также θ_p – наименьшая точка первого ранга такая, что $u-\pi < \theta_p$. Тогда

$$\begin{gathered}\left|\varphi(u)-D_{4n-2}(u,\varphi)\right| \le \left(\sum_{\theta_p \le u_j \le \theta_{\nu-1}} + \sum_{\theta_{\nu-1}<u_j\le\theta_{\nu+2}} + \sum_{\theta_{\nu+2}<u_j<\theta_p+2\pi}\right)\times \\ \times\frac{\left|\varphi(u_j)-\varphi(u)\right|}{\Psi_n(u)\Phi_n{}'(u_j)}\frac{\sin^4\dfrac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\dfrac{u-u_j}{2}} = \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3.\end{gathered} \tag{8}$$

Для Σ_3 имеем оценку

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &\le \frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{k=\nu+2}^{p+m_1-1}\sum_{\theta_k<u_j\le\theta_{k+1}} \frac{\left|\varphi(u_j)-\varphi(u)\right|}{\Phi_n{}'(u_j)\sin^4\dfrac{u-u_j}{2}} \le \\ &\le \frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{k=\nu+2}^{p+m_1-1} 2(k-\nu)\omega(\delta_n^1)\sum_{i=t_k}^{t_{k+1}-1}\sum_{\tau_i<u_j\le\tau_{i+1}} \frac{1}{\Phi_n{}'(u_j)\sin^4\dfrac{u-u_j}{2}} \le \\ &\le \frac{2\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)}\sum_{k=\nu+2}^{p+m_1-1}(k-\nu)\sum_{i=t_k}^{t_{k+1}-1}\sum_{\tau_i<u_j\le\bar{u}_i} \frac{\Phi_n{}'(\xi_j)(u_{j+1}-u_j)/\pi}{\Phi_n{}'(u_j)\sin^4\dfrac{u-u_j}{2}} + \\ &+ \frac{2\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)}\sum_{k=\nu+2}^{p+m_1-1}(k-\nu)\sum_{i=t_k}^{t_{k+1}-1}\sum_{\bar{u}_i<u_j\le\tau_{i+1}} \frac{\Phi_n{}'(\zeta_j)(u_j-u_{j-1})/\pi}{\Phi_n{}'(u_j)\sin^4\dfrac{u-u_j}{2}},\end{aligned}$$

где t_k, t_{k+1} – номера точек разбиения второго ранга, совпадающих с точками θ_k, θ_{k+1}, $\bar{u}_i$ – ближайший к середине отрезка $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ нуль функции $\sin 2\Phi_n(u)$, $\xi_j \in [u_j, u_{j+1}]$, $\zeta_j \in [u_{j-1}, u_j]$. Отношения $\dfrac{\Phi_n{}'(\xi_j)}{\Phi_n{}'(u_j)}$, $\dfrac{\Phi_n{}'(\zeta_j)}{\Phi_n{}'(u_j)}$ ограничены в силу леммы 6, поэтому, заменяя интегральные суммы интегралами, получим

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &\le \frac{C_1\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)}\sum_{k=\nu+2}^{p+m_1-1}(k-\nu)\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}\frac{dt}{(u-t)^4} = \\ &= \frac{C_1\omega(\delta_n^1)}{3\Psi_n(u)}\sum_{k=\nu+2}^{p+m_1-1}(k-\nu)\left(\frac{1}{(\theta_k-u)^3}-\frac{1}{(\theta_{k+1}-u)^3}\right) \le \\ &\le \frac{C_1\omega(\delta_n^1)}{3\Psi_n(u)}\sum_{k=\nu+2}^{p+m_1-1}\frac{1}{(\theta_k-u)^3} \le \frac{C_1\omega(\delta_n^1)}{24\Psi_n(u)}\sum_{k=\nu+2}^{p+m_1-1}\frac{1}{\sin^3\dfrac{\theta_k-u}{2}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Если $\sin^{-1}\dfrac{\theta_k - u}{2} < n^{\frac{1}{\alpha}}$ для всех $k,\ \nu+2 \le k \le p+m-1$, то по леммам 4 и 5

$$C_*^3 \ln^3 n \sum_{k=\nu+2}^{p+m} \sin^{-3}\frac{\theta_k - u}{2} < \left(\Phi_n'(u)\right)^3 < \Psi_n(u)$$

и для Σ_3 с учетом (6) и (9) будет верна оценка

$$\Sigma_3 \le \frac{C_1\omega(\delta_n^1)}{24C_*^3 \ln^3 n} = \frac{C_2}{n\ln n}. \tag{10}$$

Если же $\sin^{-1}\dfrac{\theta_k - u}{2} \ge n^{\frac{1}{\alpha}}$ для некоторого $k,\ \nu+2 \le k \le p+m-1$, то по лемме 5 $\Phi_n'(u) > C_* n^{\frac{1}{\alpha}} \ln n$, и тогда с учетом следствия из теоремы 1 получим

$$\left|D_{4n-2}(u,\varphi) - \varphi(u)\right| \le \frac{1+\pi\sqrt{2}}{\left(\Phi_n'(u)\right)^{\alpha}} < \frac{\left(1+\pi\sqrt{2}\right)}{C_*^{\alpha} n \ln^{\alpha} n}. \tag{11}$$

Для Σ_1 верна аналогичная оценка.

Оценим слагаемое Σ_2. Пусть число μ такое, что $u \in [\tau_\mu, \tau_{\mu+1}]$. Тогда

$$\Sigma_2 \le \left(\sum_{\theta_{\nu-1} < u_j \le \tau_{\mu-1}} + \sum_{\tau_{\mu-1} < u_j \le \tau_{\mu+2}} + \sum_{\tau_{\mu+2} < u_j < \theta_{\nu+2}} \right) \times$$
$$\times \frac{\left|\varphi(u_j) - \varphi(u)\right|}{\Psi_n(u)\Phi_n{}'(u_j)} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4 \dfrac{u-u_j}{2}} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \tag{12}$$

Для σ_2 очевидна оценка

$$\sigma_2 \le 3\omega(\delta_n^2) = \frac{12\ln n}{\alpha^2 n}. \tag{13}$$

Оценим σ_1 аналогично Σ_3

$$\sigma_1 \le \frac{2\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{\theta_{\nu-1} < u_j \le \tau_{\mu-1}} \frac{1}{\Phi_n{}'(u_j)\sin^4 \dfrac{u-u_j}{2}} \le \frac{160\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{j=l}^{\mu-2} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{dt}{16\sin^4 \dfrac{u-t}{2}}, \tag{14}$$

где l – номер точки разбиения второго ранга, совпадающей с точкой $\theta_{\nu-1}$.

Для тех j, для которых $2\sin\dfrac{u-\tau_{j+1}}{2} > \dfrac{\Delta\tau_{j+1}}{2\pi}$, будем иметь

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{dt}{16\sin^4 \dfrac{u-t}{2}} \le \frac{\Delta\tau_{j+1}}{16\sin^4 \dfrac{u-\tau_{j+1}}{2}} < \frac{8\pi \dfrac{\Delta\tau_{j+1}}{2\pi}}{\left(\dfrac{\Delta\tau_{j+1}^2}{4\pi^2} + 4\left(1 - \dfrac{\Delta\tau_{j+1}}{2\pi}\right)\sin^2 \dfrac{u-\tau_{j+1}}{2}\right)^2}.$$

Если же $2\sin\dfrac{u-\tau_{j+1}}{2} \le \dfrac{\Delta\tau_{j+1}}{2\pi}$, то

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{dt}{16\sin^4 \dfrac{u-t}{2}} \le \frac{1}{8\sin^3 \dfrac{u-\tau_{j+1}}{2}} < \frac{8\pi \dfrac{\Delta\tau_{j+2}}{2\pi}}{\left(\dfrac{\Delta\tau_{j+2}^2}{2\pi} + 4\left(1 - \dfrac{\Delta\tau_{j+2}}{2\pi}\right)\sin^2 \dfrac{u-\tau_{j+2}}{2}\right)^2}.$$

В таком случае соотношение (14) можно переписать в виде

$$\sigma_1 \le \frac{C_3\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{j=l}^{\mu-2} \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta\tau_{j+1}}{2\pi}\right)^2\right)\left(\frac{\Delta\tau_{j+1}^2}{4\pi^2} + 4\left(1 - \frac{\Delta\tau_{j+1}}{2\pi}\right)\sin^2\frac{u-\tau_{j+1}}{2}\right)^{-2}. \tag{15}$$

Так как кратность точек второго ранга равна $N_2 = \left[\frac{\ln n}{\alpha^2} + 1\right]$, то из (15) и леммы 4 для σ_1 следует оценка

$$\sigma_1 \le \frac{C_3 \alpha^2 \omega(\delta_n^1)}{\ln n} = \frac{4C_3 \ln n}{n}. \tag{16}$$

Такая же оценка справедлива и для σ_3, что в совокупности с соотношениями (8), (10), (11), (12), (13), (16) и доказывает теорему 2.

Из теоремы 2 следует, что операторы типа Джексона на классе $VH_{2\pi}^{\alpha}$ осуществляют приближение порядка наилучшего рационального.

Литература.

1. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
2. Ровба Е.А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
3. Pekarskii A. A. // East journal on approximations. 2007. Vol. 13. N. 3. P. 227-319.
4. Абдугаппаров А.А. Приближение функций с выпуклой производной посредством рацоинальных функций: автореф. … дис. канд. физ.-мат. наук. Калинин, 1974.
5. Freud G. //Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 1966. Vol.17, N. 3-4. P. 313-324.
6. Буланов А.П. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, №5. С. 1142-1181.
7. Пекарский А.А. // Весці АН БССР. Сер фіз.-мат. навук. 1978. №5. С. 34-39.
8. Petrushev P. // Pliska Studia Math. Bulgarica. 1997. Vol. 1. P. 145-155.
9. Пекарский А.А. // Матем. сб. 1982. Т.117, №1. С. 114-130.