В.Н. РУСАК, Н.В. ГРИБ

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Квадратурные формулы, предназначенные для интегрирования периодических функций, хорошо приближаемых тригонометрическими полиномами, изучены достаточно полно [1-2]. В данной работе рассматривается интерполяция периодических функций рациональными функциями и ее приложение к построению квадратурных формул типа Гаусса.

Пусть $|\alpha_k|<1,\ k=\overline{1,n},\ \pi_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}$ – произведение Бляшке. Поскольку $|\pi_n(z)|=1$ на единичной окружности, то выполняется равенство

$$\pi_n(e^{i\varphi})=e^{i\Phi_n(\varphi)}, \tag{1}$$

где $\Phi_n(\varphi)=\arg\pi_n(e^{i\varphi}),\ 0\le\Phi_n(0)=\arg\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k}{1-\alpha_k}<2\pi$.

Пользуясь равенством (1), нетрудно проверить, что

$$\Phi_n'(\varphi)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)}>0. \tag{2}$$

Следовательно, при изменении φ от 0 до 2π аргумент $\Phi_n(\varphi)+\varphi/2$ возрастает от $\Phi_n(0)$ до $\Phi_n(0)+(2n+1)\pi$, соответственно $\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2\right)$ имеет нули в точках φ_k,

$$0\le\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_{2n}<2\pi.$$

Непосредственно проверяется также с учетом (1) и формул Эйлера, что

$$\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1}{2i}\frac{e^{\frac{i\varphi}{2}}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\alpha_k e^{-i\varphi}\right)\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)-e^{-\frac{i\varphi}{2}}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\overline{\alpha_k}e^{i\varphi}\right)\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)}=$$
$$=\frac{t_{n+1/2}(\varphi)}{h_n(\varphi)}, \tag{3}$$

где $t_{n+1/2}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка n+1/2 с действительными коэффициентами, нулями которого являются точки $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$, $h_n(\varphi)=\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)$. В таком случае справедливо разложение [3]

$$t_{n+1/2}(\varphi)=C\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}. \tag{4}$$

Заметим, что $\cos\left(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2\right)$ также является функцией вида (3) с некоторым тригонометрическим полиномом полуцелого порядка в числителе и тем же знаменателем, причем выполняются равенства

$$\cos\left(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\right)=(-1)^k\cos\left(\Phi_n(\varphi_0)+\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Будем обозначать через $Q_{n,1}$ множество $\{t_n(x)/h_n(x)\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше n с фиксированным знаменателем $h_n(x)$, соответственно через $Q_{n,2}$ обозначим множество $\{t_{2n}(x)/h_n^2(x)\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше $2n$ с фиксированным знаменателем $h_n^2(x)$.

Для любой функции $f(\varphi)$ из пространства $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций построим интерполяционный рациональный оператор L_n, полагая

$$L_n(\varphi,f)=\sum_{k=0}^{2n}f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi),\quad l_{k,n}(\varphi)=\frac{\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(\varphi_k)+\dfrac{\varphi_k}{2}\right)}{\sin\dfrac{\varphi-\varphi_k}{2}\left(1+2\Phi_n'(\varphi_k)\right)}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Введенный равенством* (5) *оператор* L_n

1) *любую функцию* $f\in C_{2\pi}$ *отображает в тригонометрическую рациональную функцию из* $Q_{n,1}$;
2) *удовлетворяет условиям* $L_n(\varphi_k,f)=f(\varphi_k),\ k=\overline{0,2n}$;
3) *является точным на множестве* $Q_{n,1}$.

Доказательство. В силу (4) при делении полуцелого тригонометрического полинома $t_{n+1/2}(\varphi)$ на $\sin\left((\varphi-\varphi_k)/2\right)$ получим тригонометрический полином $t_{k,n}(\varphi)$ целого порядка n. Слагаемые $f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi)$ с учетом (3) отличаются лишь на константы от $t_{k,n}(\varphi)/h_n(\varphi)$, т.е. являются рациональными функциями порядка не выше n с одним и тем же знаменателем $h_n(\varphi)$. Следовательно, $\sum_{k=0}^{2n}f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi)\in Q_{n,1}$.
Из (4) и (5) ясно, что $l_{k,n}(\varphi_j)=0$, если $k\neq j$. Если же $k=j$, то по правилу Лопиталя

$$l_{j,n}(\varphi_j)=\lim_{\varphi\to\varphi_j} l_{j,n}(\varphi)=\lim_{\varphi\to\varphi_j}\frac{\cos\left(\Phi_n(\varphi)+\dfrac{\varphi}{2}\right)\left(\Phi_n'(\varphi)+\dfrac{1}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(\varphi_j)+\dfrac{\varphi_j}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\varphi-\varphi_j}{2}\left(1+2\Phi_n'(\varphi_j)\right)}=1.$$

В таком случае

$$L_n(\varphi_k,f)=\sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_j)l_{j,n}(\varphi_k)=\sum_{k\neq j}0+f(\varphi_k)\cdot 1=f(\varphi_k).$$

Если тригонометрическая рациональная функция $r_n(\varphi)\in Q_{n,1}$, то разность $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)\in Q_{n,1}$ и обращается в нуль в точках φ_k, $k=\overline{0,2n}$, т. е. $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)$ имеет $2n$+1 нуль на $[0,2\pi)$, поэтому $r_n(\varphi)-L_n(\varphi,r_n)\equiv 0$, так как тригонометрический полином порядка не выше n имеет не более $2n$ нулей в полуполосе $0\le \operatorname{Re} z<2\pi$.

На основании интерполяционного оператора (5) рассмотрим квадратурную формулу для $f\in C_{2\pi}$

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi\approx\sum_{k=0}^{2n}A_k f(\varphi_k),\quad A_k=\int_0^{2\pi} l_{k,n}(\varphi)d\varphi. \tag{6}$$

Теорема 2. *Квадратурная формула* (6) *обладает свойствами:*

1) *является точной для всякой тригонометрической рациональной функции* $r_n\in Q_{n,1}$;
2) *ее коэффициенты* A_k, $k=\overline{0,2n}$ *положительны, причем*

$$A_k=\frac{2\pi}{2\Phi_n'(\varphi_k)+1},\ k=\overline{0,2n};$$

3) *выполняется равенство* $\sum\limits_{k=0}^{2n}A_k=2\pi$.

Доказательство. Если $r_n\in Q_{n,1}$, то по теореме 1 $r_n(\varphi)=L_n(\varphi,r_n)$. Интегрируя это равенство, найдем

$$\int_0^{2\pi} r_n(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}L_n(\varphi,r_n)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n}r_n(\varphi_k)\int_0^{2\pi}l_{k,n}(\varphi)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n}A_k r_n(\varphi_k),$$

и таким образом первое свойство установлено.

Нам необходимо вычислить интеграл

$$I_k(e^{i\varphi_k})=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\sin\dfrac{\varphi-\varphi_k}{2}}d\varphi=e^{i\frac{\varphi_k}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi)}-e^{-i\Phi_n(\varphi)}}{e^{i\varphi}-e^{i\varphi_k}}d\varphi.$$

При $|z|<1$ с учетом (1) будем иметь

$$I_k(z)=e^{i\frac{\varphi_k}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi)}-e^{-i\Phi_n(\varphi)}}{e^{i\varphi}-z}d\varphi=e^{i\frac{\varphi_k}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\pi_n(e^{i\varphi})e^{i\varphi}-\pi_n(e^{i\varphi})^{-1}}{e^{i\varphi}-z}\frac{de^{i\varphi}}{ie^{i\varphi}}=$$
$$=\frac{e^{i\frac{\varphi_k}{2}}}{i}\int_{|z|=1}\frac{\xi\pi_n(\xi)-\pi_n(\xi)^{-1}}{(\xi-z)\xi}d\xi. \tag{7}$$

Принимая во внимание, что $\int\limits_{|z|=1}\frac{\pi_n(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi i\pi_n(z)$ по интегральной формуле Коши, а функция $\left((\xi-z)\xi\pi_n(\xi)\right)^{-1}$ не имеет особых точек в области $|\xi|>1$ и имеет на бесконечности нуль второго порядка, найдем из (7)

$$I_k(z)=2\pi e^{i\varphi_k/2}\pi_n(z).$$

Очевидно, что

$$I_k(e^{i\varphi_k})=\lim_{z\to e^{i\varphi_k}}I_k(z)=2\pi e^{i\frac{\varphi_k}{2}}\pi_n(e^{i\varphi_k})=2\pi e^{i\left(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\right)}=2\pi\cos\left(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\right).$$

С учетом этого равенства и соотношений (5) и (6) получим

$$A_k=\frac{\cos\left(\Phi_n(\varphi_k)+\frac{\varphi_k}{2}\right)}{2\Phi_n'(\varphi_k)+1}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi-\varphi_k}{2}}d\varphi=\frac{2\pi}{2\Phi_n'(\varphi_k)+1},\ k=\overline{0,2n},$$

и коэффициенты A_k положительны в силу (2).

Что касается третьего свойства, то достаточно заметить, что $r_n(x)\equiv 1\in Q_{n,1}$, и в силу точности квадратурной формулы на $Q_{n,1}$ найдем

$$\sum_{k=0}^{2n}A_k=\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi,$$

и доказательство теоремы закончено.

Для функции $f\in C_{2\pi}$ определим наилучшее равномерное приближение тригонометрическими рациональными функциями из $Q_{n,2}$, полагая

$$R_{2n}^T(f)=\inf\left\{\|f-r_{2n}\|:r_{2n}\in Q_{n,2}\right\}.$$

Теорема 3. *Квадратурная формула (6) точна для рациональных функций из множества $Q_{n,2}$ и справедлива оценка для ее погрешности*

$$\left|\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi-\sum_{k=0}^{2n}A_kf(\varphi_k)\right|\le 4\pi R_{2n}^T(f). \tag{8}$$

Доказательство. Покажем, что любую тригонометрическую рациональную функцию $r_{2n}\in Q_{n,2}$ можно представить в виде

$$r_{2n}(\varphi)=\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{t_{n-1/2}(\varphi)}{h_n(\varphi)}+\frac{t_n(\varphi)}{h_n(\varphi)}, \tag{9}$$

где $t_{n-1/2}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка и рациональная функция $t_n(\varphi)/h_n(\varphi)\in Q_{n,1}$.

Действительно, пусть $L_n(\varphi,r_{2n})$ значение интерполяционного оператора для функции r_{2n}, тогда $L_n(\varphi,r_{2n})=r_n(\varphi)=t_n(\varphi)/h_n(\varphi)$ и разность $r_{2n}(\varphi)-t_n(\varphi)/h_n(\varphi)$ обращается в нуль в точках $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$, поэтому

$$r_{2n}(\varphi)-\frac{t_n(\varphi)}{h_n(\varphi)}=\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{t_{n-1/2}(\varphi)}{h_n(\varphi)},$$

что равносильно равенству (9).

Покажем теперь, что

$$\int_0^{2\pi}\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{t_{n-1/2}(\varphi)}{h_n(\varphi)}d\varphi=0. \tag{10}$$

Поскольку тригонометрический полином полуцелого порядка можно записать в виде

$$t_{n-1/2}(\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_je^{i(j-1/2)\varphi}+b_je^{-i(j-1/2)\varphi}\right),$$

то равенство (10) будет следовать из соотношений

$$I_j=\int_0^{2\pi}\sin\left(\Phi_n(\varphi)+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{e^{i(j-1/2)\varphi}}{h_n(\varphi)}d\varphi=0,\quad j=\overline{1,n}, \tag{11}$$

которые нужно доказать. Снова пользуясь формулами Эйлера и переходя к комплексным переменным, будем иметь

$$I_j=\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\left(e^{i(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)}-e^{-i(\Phi_n(\varphi)+\varphi/2)}\right)\frac{e^{i(j-1/2)\varphi}}{h_n(\varphi)}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\frac{\pi_n(e^{i\varphi})e^{i\varphi/2}-\pi_n(e^{i\varphi})^{-1}e^{-i\varphi/2}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(e^{i\varphi}-\alpha_k\right)\left(e^{-i\varphi}-\overline{\alpha_k}\right)}e^{i(j-1/2)\varphi}d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{|\xi|=1}\frac{\xi^{n+j-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\overline{\alpha_k}\xi\right)^2}d\xi+\frac{1}{2}\int_{|\xi|=1}\frac{\xi^{n+j-2}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\xi-\alpha_k\right)^2}d\xi=0,$$

поскольку в первом интеграле правой части подынтегральная функция аналитична в $|z|\le 1$, а во втором аналитична в $|\xi|\ge 1$ и в бесконечно удаленной точке имеет нуль второго порядка.

Из (9), (10) и теоремы 2 следует, что

$$\int_0^{2\pi} r_{2n}(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{t_n(\varphi)}{h_n(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} r_n(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} A_k r_n(\varphi_k) = \sum_{k=0}^{2n} A_k r_{2n}(\varphi_k),$$

т. е. квадратурная формула (6) точна на множестве $Q_{n,2}$, иными словами говорят, что формула (6) является квадратурной формулой типа Гаусса.

Пусть $r_{2n}^*(\varphi) \in Q_{n,2}$ есть тригонометрическая рациональная функция наилучшего приближения для функции $f \in C_{2\pi}$, т. е. выполняется равенство

$$\left\| f - r_{2n}^* \right\|_{C_{2\pi}} = R_{2n}^T(f).$$

Для погрешности квадратурной формулы найдем

$$\left| \int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi - \sum_{k=0}^{2n} A_k f(\varphi_k) \right| = \left| \int_0^{2\pi} \left(f(\varphi) - r_{2n}^*(\varphi) \right) d\varphi + \sum_{k=0}^{2n} A_k \left(r_{2n}^*(\varphi_k) - f(\varphi_k) \right) \right| \le$$

$$\le \int_0^{2\pi} \left| f(\varphi) - r_{2n}^*(\varphi) \right| d\varphi + \sum_{k=0}^{2n} A_k \left| r_{2n}^*(\varphi_k) - f(\varphi_k) \right| \le 4\pi R_{2n}^T(f).$$

Теорема 3 полностью доказана.

Заметим в заключение, что квадратурные формулы, предназначенные для интегрирования непериодических функций, хорошо приближаемых рациональными, рассматривались ранее в [4-5].

1. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., 1974.
2. Турецкий А. Х. // Докл. АН БССР. 1960. Т.4, №9. С.365.
3. Турецкий А. Х. Теория интерполирования в задачах. Мн., 1968.
4. Ровба Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
5. Русак В. Н., Филиппова Н. К. // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. 2005. №1. С.6.

Поступило в редакцию

Валентин Николаевич Русак – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики БГУ.

Николай Васильевич Гриб – аспирант кафедры математического анализа БГПУ.