УДК 517.5

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КУСОЧНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Н. В. Гриб

The speed of approximation of 2π-periodic piecewise convex functions by summational rational operators of Jackson's type is found.

Сумматорные рациональные операторы типа Джексона на прямой впервые были построены Е.А. Ровбой [1,2]. Аналогичные операторы для окружности построены автором в работе [3], где они использовались для аппроксимации гельдеровских функций ограниченной вариации. В настоящей работе исследуется сходимость задаваемых сумматорными рациональнми операторами типа Джексона последовательностей рациональных функций к непрерывным 2π-периодическим кусочно-выпуклым функциям.

По заданной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $0 \le |\alpha_k| < 1$ определим произведение Бляшке

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}.$$

Уравнение $\pi_n^2(z) - 1 = 0$ имеет $2n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}$, $j = 1..2n$, расположенных на окружности $|z| = 1$. Введем следующие обозначения

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu}), \quad K_n(z,\xi) = \left(\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)} - 2\right)\frac{z\xi}{(z-\xi)^2},$$

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|=1} K_n(z,\xi)\frac{d\xi}{i\xi}, \quad \psi_n(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\xi|=1} K_n^2(z,\xi)\frac{d\xi}{i\xi}.$$

Легко проверить, что при $z = e^{iu}$, $\xi = e^{iv}$ верны равенства

$$K_n(z,\xi) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(v) - \Phi_n(u)\right)}{\sin^2 \frac{v-u}{2}},\ \rho_n(z) = \frac{z\pi_n'(z)}{\pi_n(z)} = \Phi_n'(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-|\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k|\sin^2\frac{u-\arg\alpha_k}{2}}. \tag{1}$$

В пространстве $C(T)$ непрерывных на единичной окружности функций введем сумматорный рациональный оператор типа Джексона

$$D_{4n-2}(z,f) = \frac{1}{\psi_n(z)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{K_n^2(z,z_j)}{\rho_n(z_j)}f(z_j), \tag{2}$$

значениями которого являются алгебраические рациональные функции степени не выше $4n-$ -2. Вместе с оператором D_{4n-2} при $z = e^{iu}$, $f(e^{iu}) = \varphi(u)$ рассмотрим оператор $D_{4n-2}^*(u,\varphi) :=$ $= D_{4n-2}(e^{iu}, f)$, действующий в пространстве $C_{2\pi}$. Из (1) и (2) следует, что, с учетом обозначения $\Psi_n(u) = \psi_n(e^{iu})$, оператор D_{4n-2}^* представим в форме

$$D_{4n-2}^*(u,\varphi) = \frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\varphi(u_j)}{\Phi_n'(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}}.$$

Л е м м а 1. *Операторы D_{4n-2} и D^*_{4n-2} точны на константах.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, докажем точность оператора D_{4n-2} для $f(z)=1$. Вычислим контурный интеграл

$$J(z)=\frac{1}{2\pi\psi_n(z)}\int\limits_{\gamma}\frac{K_n^2(z,\xi)q(\xi)d\xi}{\xi},\qquad q(\xi)=i\frac{\pi_n^2(\xi)+1}{\pi_n^2(\xi)-1},$$

где γ – замкнутый контур, окружающий точки $\{\alpha_k,1/\overline{\alpha_k}\}_{k=1}^n$, а точки $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$ находятся во внешности γ. Считаем для определённости, что все α_k различны. После некоторых подсчетов выясняем, что $q(\alpha_k)=-q\left(1/\overline{\alpha_k}\right)=i,\ q'_n(\alpha_k)=q'_n\left(1/\overline{\alpha_k}\right)=0$. Поэтому при вычислении $J(z)$ по внутренности контура γ будем иметь

$$\begin{gathered}J(z)=\frac{2\pi i}{2\pi\psi_n(z)}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname*{Res}_{\alpha_k}\frac{K_n^2(z,\xi)q(\xi)}{\xi}+\operatorname*{Res}_{1/\overline{\alpha_k}}\frac{K_n^2(z,\xi)q(\xi)}{\xi}\right)=\\=\frac{2\pi i}{2\pi\psi_n(z)}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname*{Res}_{\xi=\alpha_k}\frac{K_n^2(z,\xi)}{i\xi}-\operatorname*{Res}_{\xi=1/\overline{\alpha_k}}\frac{K_n^2(z,\xi)}{i\xi}\right)=\frac{1}{\pi\psi_n(z)}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{K_n^2(z,\xi)}{i\xi}d\xi=1.\end{gathered}\tag{3}$$

Подынтегральная функция в $J(z)$ имеет простые полюсы в точках $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$, нуль третьего порядка на бесконечности, поэтому при вычислении интеграла по внешности контура γ получим

$$\begin{gathered}J(z)=\frac{-2\pi i}{2\pi\psi_n(z)}\left(\sum_{j=1}^{2n}\operatorname*{Res}_{\xi=z_j}\frac{K_n^2(z,\xi)q(\xi)}{\xi}+\operatorname*{Res}_{\xi=\infty}\frac{K_n^2(z,\xi)q(\xi)}{\xi}\right)=\\=\frac{1}{\psi_n(z)}\sum_{j=1}^{2n}\operatorname*{Res}_{\xi=z_j}\frac{K_n^2(z,\xi)(\pi_n^2(\xi)+1)}{\xi(\pi_n^2(\xi)-1)}=\frac{1}{\psi_n(z)}\sum_{j=1}^{2n}K_n^2(z,z_j)\lim_{\xi\to z_j}\frac{\pi_n^2(\xi)+1}{\xi(\pi_n^2(\xi)-1)'}=\\=\frac{1}{\psi_n(z)}\sum_{j=1}^{2n}K_n^2(z,z_j)\lim_{\xi\to z_j}\frac{\pi_n^2(\xi)+1}{2\pi_n^2(\xi)\rho_n(\xi)}=\frac{1}{\psi_n(z)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{K_n^2(z,z_j)}{\rho_n(z_j)}.\end{gathered}\tag{4}$$

Соотношения (3) и (4) доказывают утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 1. Аналогично при $|z|=1$ устанавливается тождество

$$\frac{1}{2\rho_n(z)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{K_n(z,z_j)}{\rho_n(z_j)}=1.$$

Л е м м а 2. [4, стр. 320] *Имеют место неравенства*

$$\Psi_n(u)>\left(\Phi'_n(u)\right)^3,\quad \Psi_n(u)>\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{\left((1-|\alpha_k|)^2+4|\alpha_k|\sin^2\frac{u-\arg\alpha_k}{2}\right)^2}.$$

Назовем функцию $\varphi(u)\in C_{2\pi}$ простой, если она абсолютно непрерывна, равна нулю на дополнении отрезка $[a,b]$, $b-a\le 2\pi$, называемого опорным, к отрезку $[(a+b)/2-\pi,\ (a+b)/2+\pi]$, и $\|\varphi'\|_{L_\infty}\le(b-a)^{-1}$.

Л е м м а 3. *Если $f(u)=\varphi_1(u)+\varphi_2(u)$, где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ – простые функции с опорными отрезками $[\theta_1-d_1,\theta_1+d_1]$ и $[\theta_2-d_2,\theta_2+d_2]$, $\theta_2+d_2-\theta_1+d_1\le 2\pi$, $\theta_2-d_2\ge\theta_1+d_1$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_1^n$ справедлива оценка*

$$\left|f(u)-D^*_{4n-2}(u,f)\right|\le\sum_{l=1}^{2}\left(\frac{\frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}}\left(1-\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)^2\right)}{\frac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}}+\frac{\frac{300}{\Psi_n(u)}\left(1-\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}\right)^2}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем параметры $\{\alpha_k\}_1^n$ следующим образом: $\alpha_1 = (1-d_1/\pi)\,e^{i\theta_1}$, $\alpha_2 = (1-d_2/\pi)\,e^{i\theta_2}$, остальные параметры лежат на лучах $\arg z = \theta_1,\ \arg z = \theta_2$ и $0 \le |\alpha_k| < < 1,\ k = 3..n$. Пусть $E_u = \left\{ j | j = 1..2n, |u-u_j| < 1/\sqrt[3]{\Psi_n(u)} \right\}, \quad CE_u = \{1, 2, ..2n\} \setminus E_u$.

Если $u \in [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$, то с учетом определения простой функции, свойств оператора D^*_{4n-2}, неравенства Коши-Буняковского и замечания 1 для $l = 1, 2$ будем иметь

$$\begin{gathered}
|\varphi(u) - D_{4n-2}(u,f)| \le \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{E_u} \frac{1}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\Phi'_n(u_j)\sin^4 \frac{u-u_j}{2}} + \\
+ \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{CE_u} \frac{\pi}{2d_l} \frac{\left|\sin^3 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)\right|}{\Phi'_n(u_j)\sin^3 \frac{|u-u_j|}{2}} \le \frac{1}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} + \\
+ \frac{\pi\sqrt{\Phi'_n(u)}}{2d_l\sqrt{\Psi_n(u)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\Psi_n(u)\Phi'_n(u_j)\sin^4 \frac{u-u_j}{2}}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\Phi'_n(u)\Phi'_n(u_j)\sin^2 \frac{u-u_j}{2}}} = \\
= \frac{1}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} = \frac{\pi\sqrt{2}+1}{2d_l\sqrt[3]{\Psi_n(u)}}.
\end{gathered} \tag{5}$$

На основании соотношения

$$\frac{1}{d_l} = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{d_l}{\pi}}{\frac{d_l^2}{\pi^2}} \le \frac{1}{\pi^3}\left(100 + \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{\frac{2d_l}{\pi} - \frac{d_l^2}{\pi^2}}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 100d_l^2} \le \frac{1}{\pi^3}\left(100 + \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}}$$

при $u \in [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$ из (5) имеем

$$\left|f(u) - D^*_{4n-2}(u,f)\right| < \frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \sum_{l=1}^{2} \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}}. \tag{6}$$

Из определения простой функции видно, что ее модуль не превышает $1/2$, поэтому при $u \notin [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$ установим

$$\begin{gathered}
|\varphi(u) - D_{4n-2}(u,f)| = \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{|f(u_j)|}{\Phi'_n(u_j)} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4 \frac{u-u_j}{2}} < \\
< \frac{1}{2\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^{2} \sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{25}{\Phi'_n(u_j)\left(\frac{(u-u_j)^2}{81\pi^2} + \frac{400}{81}\sin^2\frac{9(u-\theta_l)}{20}\right)^2} < \\
< \frac{1}{2\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^{2} \frac{25}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}\right)^2} \sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{1}{\Phi'_n(u_j)}.
\end{gathered} \tag{7}$$

При $x \in [\theta_l - d_l, \theta_l + d_l]\,,\ l = 1, 2$ из (1) имеем

$$\Phi'_n(x) > \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{x-\theta_l}{2}} > \frac{\frac{d_l}{\pi}}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + d_l^2} = \frac{\pi}{(1+\pi^2)\,d_l}. \tag{8}$$

Так как все параметры $\{\alpha_k\}_1^n$ лежат на лучах $\arg z = \theta_1,\ \arg z = \theta_2$, функция $\Phi'_n(x)$ имеет локальные максимумы в точках θ_1 и θ_2, локальные минимумы в некоторых точках τ_1 и τ_2, где $\tau_1 < \theta_1,\ \ \theta_1 < \tau_2 < \theta_2$, причем $\Phi'_n(x)$ монотонна на каждом из отрезков $[\tau_1, \theta_1]$, $[\theta_1, \tau_2]$, $[\tau_2, \theta_2]$, $[\theta_2, \tau_1 + 2\pi]$. Из определения функции $\Phi_n(x)$ и расположения точек u_j понятно, что $\Phi_n(u_{j+1}) - - \Phi_n(u_j) = \pi,\ j = 1..2n-1$, с учетом этого при оценке последней суммы в (7) на промежутках убывания $\Phi'_n(x)$ будем заменять единицу на $\Phi'_n(\xi_j)\,(u_{j+1} - u_j)\,/\pi$, на промежутках возрастания

– на $\Phi_n'(\zeta_j)\,(u_j-u_{j-1})\,/\pi$, $\xi_j\in[u_j,u_{j+1}]$, $\zeta_j\in[u_{j-1},u_j]$. Отношения $\Phi_n'(\zeta_j)/\Phi_n'(u_j)$, $\Phi_n'(\xi_j)/\Phi_n'(u_j)$ будут ограничены единицей в силу монотонности $\Phi_n'(x)$, для оценки же слагаемых, соответствующих ближайшим u_j к τ_1 и τ_2, воспользуемся (8)

$$\sum_{\theta_l-d_l<u_j<\theta_l+d_l}\frac{1}{\Phi_n'(u_j)}\le\sum\frac{\Phi_n'(\zeta_j)\,(u_j-u_{j-1})}{\pi\Phi_n'(u_j)}+\sum\frac{\Phi_n'(\xi_j)\,(u_{j+1}-u_j)}{\pi\Phi_n'(u_j)}+\frac{2\left(1+\pi^2\right)d_l}{\pi}\le\frac{2\left(2+\pi^2\right)d_l}{\pi}. \tag{9}$$

Подставляя данную оценку в (7) , получим

$$\left|\varphi(u)-D_{4n-2}^{*}(u,\varphi)\right|\le\frac{300}{\Psi_n(u)}\sum_{l=1}^{2}\frac{1-\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_l}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_l}{2}\right)^2},$$

откуда в совокупности с (6) и следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Если* $f(u)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\varphi_k(u)+b_k\psi_k(u)\right)$, *где* $a_k,b_k\ge0$, $\varphi_k(u)$ *и* $\psi_k(u)$ *– простые функции с опорными отрезками* $[\theta_1-c_k,\theta_1+c_k]$ *и* $[\theta_2-d_k,\theta_2+d_k]$ *соответственно, причем для каждой четверки* θ_1, θ_2,c_k,d_k, $k=1..n$ *выполнены условия леммы 3, то существует такой набор параметров* $\{\alpha_k\}_1^m$, $m\le4n$, *что для определяемого ими оператора* D_{4m-2}^{*} *выполняется неравенство*

$$\left|f(u)-D_{4m-2}^{*}(u,f)\right|<\frac{459}{n}\max\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k,\sum_{k=1}^{n}b_k\right\}.$$

Доказательство. Пусть $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$. Параметры выбираем по правилу

$$\alpha_{k,i,1}=\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)e^{i\theta_1},\ i=1..\left[\frac{a_k}{A_n}n\right]+1,\ \alpha_{k,i,2}=\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)e^{i\theta_2},\ i=1..\left[\frac{b_k}{B_n}n\right]+1,\ k=1..n.$$

Их количество удовлетворяет соотношению $m\le\sum_{k=1}^{n}\left(a_kn/A_n+b_kn/B_n+2\right)=4n$.
С учетом линейности оператора D_{4m-2}^{*} и лемм 1-3 для его уклонения от $f(u)$ будем иметь

$$\left|f(u)-D_{4m-2}^{*}(u,f)\right|<\frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_m(u)}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k\left(1-\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)^2\right)}{\frac{c_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_1}{2}}+\frac{b_k\left(1-\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)^2\right)}{\frac{d_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_2}{2}}\right)+$$
$$+\frac{300}{\Psi_m(u)}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k\left(1-\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{c_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{c_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_1}{2}\right)^2}+\frac{b_k\left(1-\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{d_k^2}{\pi^2}+4\left(1-\frac{d_k}{\pi}\right)\sin^2\frac{u-\theta_2}{2}\right)^2}\right)\le$$
$$\le\frac{9\max\{A_n,B_n\}}{n}+\frac{450\max\{A_n,B_n\}}{n}=\frac{459\max\{A_n,B_n\}}{n},$$

и доказательство леммы закончено.

Обратим внимание, что, например, в [4, стр. 311] доказывается аналогичная теорема для суммы произвольных простых функций. Аппаратом приближения также являются операторы Джексона, но интегрального типа, и уклонение оценивается несколько проще, чем в случае сумматорных операторов. В настоящей работе вместо тривиального интеграла нам приходится иметь дело с суммой из левой части неравенства (9). Для получения удовлетворительных оценок этой суммы на параметры, определяющие оператор (а, стало быть, и на приближаемые простые функции), приходится накладывать дополнительные ограничения.

Теорема 1. *Если* $f(u)\in C_{2\pi}$ *четная и выпуклая на отрезке* $[0,\pi]$, *то при подходящем выборе параметров* $\{\alpha_k\}_1^m$, $m\le4n-4$ *будет иметь место порядковая оценка*

$$\left\|f(u)-D_{4m-2}^{*}(u,f)\right\|=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая функция $f(u)$, удовлетворяющая условиям теоремы, может быть представлена в виде $f(u) = c + g(u)$ или $f(u) = c - g(u)$, где с – некоторая константа, а $g(u) \in C_{2\pi}$ – некоторая четная функция, выпуклая вниз на отрезке $[0,\pi]$ и $\inf\limits_{0\le u<2\pi} g(u) = 0$. Через $\{u_k\}_1^n$ и $\{v_k\}_1^n$, $0 \le u_k, v_k \le 2\pi$, $k = 1..n$ обозначим абсциссы точек, для которых $g(u_k) = g(0)k/n$ и $g(v_k) = g(\pi)k/n$. Рассмотрим четную 2π-периодическую ломаную $\varphi(u)$ с вершинами в точках $(\pm u_k, g(u_k) - g(0)k/n)$, $k = 1..n$ и $(\pm(\pi - v_k), g(v_k) - g(\pi)k/n)$, $k = 1..n$. Для $u \in (-v_1, -u_1) \cup (u_1, v_1)$ положим $\varphi(u) = 0$. Очевидно неравенство $\|g(u) - \varphi(u)\| \le \|g\|/n$. Ломаную $\varphi(u)$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k\varphi_k(u) + b_k\psi_k(u)\right), \quad a_k, b_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_k \le 2g(0), \quad \sum_{k=1}^{n-1} b_k \le 2g(\pi) \tag{10}$$

простых треугольных функций $\varphi_k(u) = \max\{0, 1 - |u|/u_k\}/2$, $\psi_k(u) = \max\{0, 1 - |u-\pi|/(\pi - v_k)\}/2$, поэтому, согласно лемме 4 и (10), существует оператор D^*_{4m-2}, $m \le 4n-4$ такой, что $\left\|\varphi(u) - D^*_{4m-2}(u,\varphi)\right\| \le 918\|g\|/n$. Для уклонения этого оператора от $g(u)$ имеем

$$\left\|g(u) - D^*_{4m-2}(u,f)\right\| \le \|g(u) - \varphi(u)\| + \left\|\varphi(u) - D^*_{4m-2}(u,\varphi)\right\| + \left\|D^*_{4m-2}(u,\varphi) - D^*_{4m-2}(u,g)\right\| \le$$
$$\le \frac{\|g\|}{n} + \frac{918\|g\|}{n} + \left\|D^*_{4m-2}(u, g-\varphi)\right\| \le \frac{919\|g\|}{n} + \left\|D^*_{4m-2}\right\| \cdot \|g(u) - \varphi(u)\| = \frac{920\|g\|}{n}.$$

Тогда с учетом линейности и точности оператора на константах окончательно находим

$$\left\|f(u) - D^*_{4m-2}(u,f)\right\| = \left\|c \pm g(u) - D^*_{4m-2}(u,c) \mp D^*_{4m-2}(u,g)\right\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В качестве следствия из теоремы 1 может быть получен результат В. А. Попова и П. П. Петрушева [5] о порядке приближения непрерывных на отрезке выпуклых функций алгебраическими рациональными функциями степени не выше n.

В заключение заметим, что аппроксимация линейных комбинаций простых функций интегральными рациональными операторами и ее приложения к нахождению порядковых оценок для наилучших рациональных приближений исследовались А. А. Пекарским [6]. В. Н. Русак и И. В. Рыбаченко [7] использовали линейные комбинации простых функций для приближения сумматорными рациональными операторами выпуклых функций пространства C_∞.

Литература

1. **Ровба Е. А.** Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно: ГрГУ, 2001.

2. **Ровба Е. А.** Сумматорные рациональные операторы типа Джексона // Мат. заметки. 1997. Т. 61, №6. С. 18-22.

3. **Гриб Н. В.** Аппроксимация сумматорными рациональными операторами типа Джексона в пространстве непрерывных 2π-периодических функций // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2011. №1. – С. 17-24.

4. **Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y.** Constructive Approximation. Advanced Problems. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

5. **Попов В. А., Петрушев П. П.** Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями // Мат. сборник. 1977. Т. 103, №6. С. 285-292.

6. **Пекарский А. А.** Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Мат. сборник. 1987. Т. 133, №1. С. 86-102.

7. **Русак В.Н., Рыбаченко И.В.** Свойства функций и приближение сумматорными рациональными операторами на действительной оси. // Мат. заметки. 2004. Т. 76. №1. С. 111-118.

Белорусский государственный педагогический университет, г. Минск