

## Сумматорные рациональные операторы типа Фейера на единичной окружности

Н. В. Гриб (Минск, Беларусь)

Рациональные операторы типа Фейера, построенные В.Н. Русаком [2], нашли применение как в теории рациональной аппроксимации с фиксированными полюсами, так и со свободными полюсами. Эти операторы являются интегральными и своим происхождением восходят к рациональным рядам Фурье. Первые исследования по интерполяционным рациональным операторам в пространстве  $C(R)$  были выполнены Е.А. Ровбой [1]. В настоящей работе вводятся сумматорные рациональные операторы типа Фейера в пространстве  $C(L)$ , исследуется их сходимость к функциям из  $C_{2\pi}$ .

Для заданной последовательности комплексных чисел  $\{\alpha_k\}_{k=1}^n, 0 \leq |\alpha_k| < 1$  соответствующее произведение Бляшке имеет вид

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}.$$

Если точку  $z$  повернуть вдоль единичной окружности на угол  $2\pi$ , то  $\arg \pi_n^3(z)$  изменится на  $6\pi n$ , непрерывно возрастаая. Поэтому уравнение  $\pi_n^3(z) - 1 = 0$  имеет  $3n$  различных корней  $z_j = e^{iu_j}, j = \overline{1, 3n}$ , расположенных на окружности  $|z| = 1$ .

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu}), \quad (1)$$

$$\rho_n(z) = z \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - \bar{\alpha}_k z)(z - \alpha_k)},$$

$$K_n(z, \xi) = \left( \frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)} - 2 \right) \frac{z\xi}{(z - \xi)^2}.$$

**Лемма 1.** Если  $z = e^{iu}, \xi = e^{iv}$ , то справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (\Phi_n(v) - \Phi_n(u))}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} dv = \oint_{|\xi|=1} K_n(z, \xi) \frac{d\xi}{i\xi} = 2\pi \rho_n(z). \quad (2)$$

В пространстве  $C_{2\pi}$  непрерывных  $2\pi$ -периодических функций введем сумматорный рациональный оператор типа Фейера

$$F_{2n-2}(z, f) = \frac{1}{3\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \frac{K_n(z, z_j)}{\rho_n(z_j)} f(z_j). \quad (3)$$

Непосредственно проверяется, что  $F_{2n-2}$  — положительный оператор, значениями которого являются рациональные функции степени не выше  $2n - 2$ .

Можно получить другое представление оператора  $F_{2n-2}(z, f)$ . Из (1) следует

$$e^{i\Phi_n(u)} = \pi_n(e^{iu}).$$

Продифференцируем обе части по  $u$

$$ie^{i\Phi_n(u)}\Phi'_n(u) = \pi'_n(e^{iu})ie^{iu}$$

Учитывая то, что

$$\pi'_n(z) = \sum_{k=1}^n \pi_n(z) \frac{1 - \bar{\alpha}_k z}{z - \alpha_k} \left( \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z} \right)' = \pi_n(z) \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - \bar{\alpha}_k z)(z - \alpha_k)} = \frac{\pi_n(z)\rho_n(z)}{z}, \quad (4)$$

получим

$$\Phi'_n(u) = \frac{\pi'_n(e^{iu})e^{iu}}{\pi_n(e^{iu})} = \rho_n(e^{iu}). \quad (5)$$

При  $z = e^{iu}$ ,  $z_j = e^{iu_j}$  из (2), (3) и (5) будем иметь

$$F_{2n-2}(u, f) = \frac{1}{3\Phi'_n(u)} \sum_{j=1}^{3n} \frac{f(e^{iu_j}) \sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi'_n(u_j) \sin^2 \frac{u-u_j}{2}},$$

или, если  $f(e^{iu}) = \varphi(u)$

$$F_{2n-2}(u, \varphi) = \frac{1}{3\Phi'_n(u)} \sum_{j=1}^{3n} \frac{\varphi(u) \sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi'_n(u_j) \sin^2 \frac{u-u_j}{2}}. \quad (6)$$

**Лемма 2.** Оператор  $F_{2n-2}(u, f)$  является точным на константах.

Доказательство. Не ограничивая общности, докажем точность оператора  $F_{2n-2}(u, f)$  для  $f(u) = 1$ , то есть покажем, что

$$\frac{1}{3\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \frac{K_n(z, z_j)}{\rho_n(z_j)} \equiv 1.$$

Для этого вычислим контурный интеграл

$$J(z) = \frac{1}{4\pi\rho_n(z)} \oint_{\gamma} \frac{K_n(z, \xi)q(\xi)d\xi}{\xi}, \quad q(\xi) = i \frac{\pi_n^3(\xi) + 1}{\pi_n^3(\xi) - 1},$$

где  $\gamma$  - замкнутый контур, окружающий точки  $\left\{ \alpha_k, \frac{1}{\bar{\alpha}_k} \right\}$ , а точки  $\{z_j\}_{j=1}^{3n}$  находятся во внешности  $\gamma$ . Считаем для определённости, что все  $\alpha_k$  различны. Для начала найдем значения функции  $q(\xi)$  в точках  $\alpha_k$  и  $1/\bar{\alpha}_k$ . Так как

$$q(\xi) = i \frac{\pi_n^3(\xi) + 1}{\pi_n^3(\xi) - 1} = i \frac{\prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_k)^3 + \prod_{k=1}^n (1 - \bar{\alpha}_k \xi)^3}{\prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_k)^3 - \prod_{k=1}^n (1 - \bar{\alpha}_k \xi)^3},$$

поэтому  $q(\alpha_k) = -i$ ,  $q(1/\bar{\alpha}_k) = i$ . Применив теорему о вычетах для внутренней области и лемму 1, получим

$$\begin{aligned}
J(z) &= \frac{2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{k=1}^n \left( \operatorname{Res}_{\alpha_k} \frac{K_n(z, \xi)q(\xi)}{\xi} + \operatorname{Res}_{1/\bar{\alpha}_k} \frac{K_n(z, \xi)q(\xi)}{\xi} \right) = \\
&= \frac{2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{k=1}^n \left( \lim_{\xi \rightarrow \alpha_k} \frac{K_n(z, \xi)q(\xi)(\xi - \alpha_k)}{\xi} + \lim_{\xi \rightarrow 1/\bar{\alpha}_k} \frac{K_n(z, \xi)q(\xi)(\xi - 1/\bar{\alpha}_k)}{\xi} \right) = \\
&= \frac{2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{k=1}^n \left( -i \operatorname{Res}_{\alpha_k} \frac{K_n(z, \xi)}{\xi} + i \operatorname{Res}_{1/\bar{\alpha}_k} \frac{K_n(z, \xi)}{\xi} \right) = \\
&= \frac{2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{k=1}^n \left( \operatorname{Res}_{\alpha_k} \frac{K_n(z, \xi)}{i\xi} - \operatorname{Res}_{1/\bar{\alpha}_k} \frac{K_n(z, \xi)}{i\xi} \right) = \\
&= \frac{1}{4\pi\rho_n(z)} \left( \oint_{|\xi|=1} K_n(z, \xi) \frac{d\xi}{i\xi} + \oint_{|\xi|=1} K_n(z, \xi) \frac{d\xi}{i\xi} \right) = \frac{1}{2\pi\rho_n(z)} \oint_{|\xi|=1} K_n(z, \xi) \frac{d\xi}{i\xi} \equiv 1.
\end{aligned}$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках  $\{z_j\}_{j=1}^{3n}$ , а на бесконечности — нуль второго порядка, поэтому при вычислении интеграла по внешности контура  $\gamma$  будем иметь

$$\begin{aligned}
J(z) &= \frac{-2\pi i}{4\pi\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \left( \operatorname{Res}_{z_j} \frac{K_n(z, \xi)q(\xi)}{\xi} + \operatorname{Res}_{\infty} \frac{K_n(z, \xi)q(\xi)}{\xi} \right) = \\
&= \frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \operatorname{Res}_{z_j} \frac{K_n(z, \xi)(\pi_n^3(\xi) + 1)}{\xi(\pi_n^3(\xi) - 1)} = \frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \lim_{\xi \rightarrow z_j} \frac{K_n(z, \xi)(\pi_n^3(\xi) + 1)}{\xi(\pi_n^3(\xi) - 1)'} = \\
&= \frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \lim_{\xi \rightarrow z_j} \frac{K_n(z, \xi)(\pi_n^3(\xi) + 1)}{3\xi\pi_n^2(\xi)\pi_n'(\xi)} = \frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} K_n(z, z_j) \lim_{\xi \rightarrow z_j} \frac{\pi_n^3(\xi) + 1}{3\pi_n^3(\xi)\rho_n(\xi)} = \\
&= \frac{1}{3\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{3n} \frac{K_n(z, z_j)}{\rho_n(z_j)}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим  $\alpha^{(n)} = (-1)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k^3$ ,  $c_\alpha^{(n)} = \frac{1 - |\alpha^{(n)}|^2}{1 + |\alpha^{(n)}|^2 - 2\operatorname{Re} \alpha^{(n)}}$ . Тогда имеет место

**Лемма 3.** Выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{\rho_n(z_j)} = 3c_\alpha^{(n)},$$

и, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (1 - |\alpha_k|) = \infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_\alpha^{(n)} = 1.$$

Доказательство. Обозначим  $\psi(z) = (\pi_n^3(z) - 1)^{-1}$  и рассмотрим интеграл

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{\psi(z) dz}{z}.$$

Подынтегральная функция в круге имеет простые полюсы в нуле и в точках  $\{z_j\}_j^{3n}$ . Значит, в согласии с (4)

$$J(z) = \operatorname{Res}_0 \frac{1}{z(\pi_n^3(z) - 1)} + \sum_{j=1}^{3n} \operatorname{Res}_{z_j} \frac{1}{z(\pi_n^3(z) - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\pi_n^3(z) - 1} + \sum_{j=1}^{3n} \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{1}{3z\pi_n^2(z)\pi_n'(z)}$$

С другой стороны, подынтегральная функция аналитична во внешности  $|z| = 2$ , поэтому из интегральной формулы Коши для бесконечной области следует, что

$$J(z) = \psi(\infty) = \frac{1}{\pi_n^3(\infty) - 1}$$

Так как  $\pi_n^3(0) = \prod_{k=1}^n -\alpha_k^3 = \alpha^{(n)}$ ,  $\pi_n^3(\infty) = \prod_{k=1}^n -1/\bar{\alpha}_k^3 = -1/\bar{\alpha}^{(n)}$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{\rho_n(z_j)} &= 3 \left( \frac{1}{\pi_n^3(\infty) - 1} - \frac{1}{\pi_n^3(0) - 1} \right) = 3 \left( \frac{1}{1/\bar{\alpha}^{(n)} - 1} - \frac{1}{\alpha^{(n)} - 1} \right) = \\ &= 3 \left( -\frac{1}{\alpha^{(n)} - 1} - \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{\alpha^{(n)} - 1} \right) = 3 \frac{1 - |\alpha^{(n)}|^2}{1 + |\alpha^{(n)}|^2 - 2 \operatorname{Re} \alpha^{(n)}}. \end{aligned}$$

Если обозначить  $\gamma_n = \sum_{k=1}^n (1 - |\alpha_k|)$ , то, очевидно,  $\sum_{k=1}^n |\alpha_k| = n - \gamma_n$ . По среднее геометрическое чисел не превышает среднего арифметического

$$\left( \prod_{k=1}^n |\alpha_k| \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|,$$

поэтому

$$\prod_{k=1}^n |\alpha_k| \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \right)^n = \left( 1 - \frac{\gamma_n}{n} \right)^n.$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n/n = 0$ , то

$$\left( 1 - \frac{\gamma_n}{n} \right)^n = \left( 1 - \frac{\gamma_n}{n} \right)^{-\frac{n}{\gamma_n}(-\gamma_n)} \sim e^{-\gamma_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

В противном случае  $\frac{\gamma_n}{n} > d > 0$ , где  $d$  не зависит от  $n$ , и тогда

$$\left( 1 - \frac{\gamma_n}{n} \right)^n \leq (1 - d)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n -\alpha_k^3 = 0$ , и заканчивает доказательство соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_\alpha^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |\alpha^{(n)}|^2}{1 + |\alpha^{(n)}|^2 - 2 \operatorname{Re} \alpha^{(n)}} = 1.$$

**Теорема 1.** Если  $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ , то имеет место неравенство

$$|F_{2n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| \leq \left(1 + \pi \sqrt{c_\alpha^{(n)}}\right) \omega \left(\frac{1}{\sqrt{\Phi_n'(u)}}\right),$$

где  $\omega(\delta)$  - модуль непрерывности функции  $\varphi(u)$ .

Доказательство. Введем обозначения

$$\delta_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_n'(u)}}, \quad E = \{j | j = \overline{1..3n}, |u - u_j| < \delta_n(u)\}, \quad CE = \{1, 2, ..3n\} \setminus E.$$

Тогда с учетом определения модуля непрерывности для уклонения функции  $\varphi(u)$  от оператора  $F_{2n-2}(u, \varphi)$  будем иметь

$$\begin{aligned} |F_{2n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| &= \left| \frac{1}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j=1}^{3n} \frac{\varphi(u_j) - \varphi(u)}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j \in E} \frac{\omega(|u-u_j|)}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right| + \\ &\left| \frac{1}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j \in CE} \frac{\omega(|u-u_j|)}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right| = S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Воспользовавшись неравенством

$$\omega(|u - u_j|) \leq \omega(\delta_n(u)) (|u - u_j| \delta_n^{-1}(u) + 1),$$

получим

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &\leq \frac{\omega(\delta_n(u))}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j \in E} \frac{1}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} + \\ &+ \frac{\omega(\delta_n(u))}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j \in CE} \frac{1}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} + \\ &+ \frac{\omega(\delta_n(u))}{3\delta_n(u)\Phi_n'(u)} \sum_{j \in CE} \frac{|u-u_j|}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} = \\ &= \omega(\delta_n(u)) \left( 1 + \frac{1}{3\sqrt{\Phi_n'(u)}} \sum_{j \in CE} \frac{|u-u_j|}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right) \leq \\ &\leq \omega(\delta_n(u)) \left( 1 + \frac{\pi}{3\sqrt{\Phi_n'(u)}} \sum_{j \in CE} \frac{|\sin \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))|}{\Phi_n'(u_j) |\sin \frac{u-u_j}{2}|} \right) = \omega(\delta_n(u)) (1 + S_3). \end{aligned} \quad (8)$$

К сумме  $S_3$  применим неравенство Коши-Буняковского и лемму 3

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{\pi}{3\sqrt{\Phi'_n(u)}} \sum_{j \in CE} \frac{1}{\sqrt{\Phi'_n(u_j)}} \left( \frac{1}{\sqrt{\Phi'_n(u_j)}} \frac{\sin \frac{1}{2} |\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)|}{\sin \frac{|u - u_j|}{2}} \right) \leq \\ &\leq \frac{\pi}{3\sqrt{\Phi'_n(u)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{\Phi'_n(u_j)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{\Phi'_n(u_j)} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^2 \frac{u - u_j}{2}}} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{3c_\alpha^{(n)}} = \pi \sqrt{c_\alpha^{(n)}}, \end{aligned}$$

что в совокупности с (7) и (8) заканчивает доказательство теоремы.

**Следствие.** Если  $\varphi(u) \in C_{2\pi}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (1 - |\alpha_k|) = \infty$ , то последовательность рациональных функций  $F_{2n-2}(u, \varphi)$  равномерно сходится к функции  $\varphi(u)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Это следствие вытекает из оценки

$$\begin{aligned} \Phi'_n(u) &= e^{iu} \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - \bar{\alpha}_k e^{iu})(e^{iu} - \alpha_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 + |\alpha_k|^2 - 2|\alpha_k| \cos(u - \arg \alpha_k)} \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 + |\alpha_k|)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|}{1 + |\alpha_k|} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1 - |\alpha_k|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Оценка в теореме 1 может быть улучшена, если наложить на числа  $\{\alpha_k\}_1^n$  некоторые дополнительные ограничения. Пусть, например, числа  $\{\alpha_k\}_1^n$  не имеют предельных точек на окружности  $|z| = 1$ , т. е. выполняется условие

$$1 - |\alpha_k| \geq d > 0, \quad k = \bar{1}, n,$$

где  $d$  не зависит от  $k$ .

Без доказательства приведем следующие теоремы.

**Теорема 2.** Если  $\varphi(u) \in C_{2\pi}$  и числа  $\{\alpha_k\}_1^n$  не имеют предельных точек на единичной окружности, то имеет место неравенство

$$|F_{2n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| \leq \left(1 + \frac{24\pi}{d^3}\right) \omega\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

**Теорема 3.** Если  $\varphi(u) \in Lip_M \alpha$  и числа  $\{\alpha_k\}_1^n$  не имеют предельных точек на единичной окружности, то имеет место неравенство

$$|F_{2n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| < \begin{cases} \frac{24\pi M \ln n}{d^3}, & \alpha = 1 \\ \frac{8\pi M}{d^{4-\alpha}} \left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) \frac{1}{n^\alpha}, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

### Литература.

1. Ровба Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
2. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн.: Выш. шк., 1979.