РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Шилинец В.А., Скребец Г.А., Тополь Ж.С.
Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Республика Беларусь, shilinets@bspu.unibel.by

Как известно, дифференциальные операторы (формальные производные) $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ использовались рядом авторов при исследовании уравнений в частных производных. В частности, И.Н. Векуа успешно применял эти операторы для исследования дифференциального уравнения

$$\Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y).$$

Целью данного исследования является решение с помощью функций, моногенных в смысле В.С. Фёдорова (F-моногенных), следующей системы дифференциальных уравнений в формальных производных $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=A\frac{\partial \varphi}{\partial z}+B\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z},\ \frac{\partial f}{\partial \bar z}=A_1\frac{\partial \varphi}{\partial z}+B_1\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z}, \tag{1}$$

где A, B, A_1, B_1 – действительные или комплексные константы; D – односвязная область плоскости x, y; f, φ – искомые комплексные функции класса $C^1(D)$. Считаем $A_1 \neq 0,\ B \neq 0$.

Введем замену $w = f$, $u = A_1\varphi$, тогда система (1) примет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=a\frac{\partial u}{\partial z}+b\frac{\partial u}{\partial \bar z},\ \frac{\partial w}{\partial \bar z}=\frac{\partial u}{\partial z}+(c+a)\frac{\partial u}{\partial \bar z}, \tag{2}$$

где a,b,c – некоторые постоянные, $b \neq 0$. Если положить $v = w - au$, то система (2) редуцируется к виду

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \bar z},\ \frac{\partial v}{\partial \bar z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{s}{r}\frac{\partial u}{\partial \bar z}, \tag{3}$$

где $s, r = const, r \neq 0$.

Пусть τ_1 и τ_2 – корни уравнения $\tau^2 = s\tau + r$.

Из (3), очевидно, следует:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}-\tau_k\frac{\partial}{\partial z}\right)f_k=0 \qquad (k=1,2), \tag{4}$$

где $f_k = u + \tau_k v \quad (k=1,2)$.

1°. $\tau_1 \neq \tau_2$; τ_1, τ_2 – действительные. Полагаем $p = z + \tau_1\bar z,\ q = \bar z$. Имеем $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x = -2i$.

Вводим формальные производные

$$\frac{\partial f_1}{\partial p}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)=\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+i\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}-i\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\tau_1=\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}-\tau_1\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Уравнение (4) для $k=1$ примет вид $\frac{\partial f_1}{\partial q}=0$, откуда делаем вывод, что $u+\tau_1 v=\varphi_1(z+\tau_1\bar{z})$ – любая F-моногенная по функции $p=z+\tau_1\bar{z}$ функция.

Аналогично: $u+\tau_2 v=\varphi_2(z+\tau_2\bar{z})$ – любая F-моногенная по функции $p=z+\tau_2\bar{z}$ в области D функция. Из равенств $u+\tau_1 v=\varphi_1(z+\tau_1\bar{z})$, $u+\tau_2 v=\varphi_2(z+\tau_2\bar{z})$ находим u и v.

2°. $\tau_1\neq\tau_2$; τ_1,τ_2 – комплексные. Положим $p=z+\tau_1\bar{z}$, $q=z-\tau_1\bar{z}$. Имеем $\delta=p'_x q'_y-p'_y q'_x=4i\tau_1$.

Вводим формальные производные

$$\frac{\partial f_1}{\partial p}=\frac{1}{2\tau_1}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial q}=-\frac{1}{2\tau_1}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}=\frac{\partial f_1}{\partial p}+\frac{\partial f_1}{\partial q},\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}=\tau_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial p}-\frac{\partial f_1}{\partial q}\right).$$

Отсюда следует, что уравнение (4) при $k=1$ равносильно уравнению $\frac{\partial f_1}{\partial q}=0$, а потому получим, что $f_1=u+\tau_1 v=\varphi_1(z+\tau_1\bar{z})$ – F-моногенная по функции $p=z+\tau_1\bar{z}$ функция. Аналогично: $f_2=u+\tau_2 v=\varphi_2(z+\tau_2\bar{z})$ – функция, F–моногенная по функции $p=z+\tau_2\bar{z}$. Далее находим u и v.

3°. $\tau_1=\tau_2$. Имеем $u+\tau_1 v=\varphi_1(p)$, $p=z+\tau_1\bar{z}$, причем $\tau_1=\frac{s}{2},r=-\frac{s^2}{4}$. Отсюда $u=\varphi_1(p)-\tau_1 v$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi_1'(p)-\tau_1\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\varphi_1'(p)\tau_1-\tau_1\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}$.

Первое уравнение системы (3) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{s}{2}\left(\varphi_1'(p)-\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\right),\ \left(\frac{s}{2r}=-\frac{2}{s}\right);\ \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{2}{s}\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}-\frac{2}{s}\varphi_1'(p);\ \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}-\tau_1\frac{\partial v}{\partial z}=\varphi_1'(p).$$

Отсюда $\frac{\partial v}{\partial q}=\varphi_1'(p)$, а потому $v=\varphi_1'(p)q+\theta(p)$, где $q=\bar{z}$, $\theta(p)$ – любая F-моногенная по p функция.

Задача решается формулами

$$u=\varphi_1(p)-\tau_1 v \text{ и } v=\varphi_1'(p)q+\theta(p).$$