РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Шилинец В.А. , Стельмашук Н.Т., Ольшевская А.В.

Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Республика Беларусь, shilinets @ bspu. unibel. by

Предметом исследования является следующая система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}=a_1f+b_1\varphi, \frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial \varphi}{\partial p}=a_2f+b_2\varphi, \tag{1}$$

где $a_k=a_k(x,y), b_k=b_k(x,y), p=p(x,y), q=q(x,y)(k=1,2)$– комплексные функции класса $C^2(D); D$ – односвязная область; $\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{1}{\delta}(f_xq_y-f_yq_x); \frac{\partial f}{\partial q}=\frac{1}{\delta}(f_yp_x-f_xp_y)(\delta=(p_xq_y-p_yq_x)\neq 0$ в области D) – дифференциальные операторы (формальные производные), обладающие свойствами обычных частных производных.

Данная работа примыкает к исследованиям И.Н. Векуа по обобщенным аналитическим функциям. Для дальнейшего нам потребуются бикомплексные F-моногенные функции.

Определение 1. Бикомплексной функцией называется функция вида $w=F(x,y)=f(x,y)+j\varphi(x,y)$, где $j^2=i^2=-1, i\neq j, f, \varphi,$ – комплексные функции.

Определение 2. Бикомплексная функция $w=F(x,y)=f(x,y)+j\varphi(x,y)$ называется F-моногенной по функции $P=p(x,y)+jq(x,y)$ в области D, если существует такая функция θ, что в области D $F_x=\theta P_x, F_y=\theta P_y$.

Доказаны теоремы.

Теорема 1. Система (1) редуцируется к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial Q}=\alpha f+\beta\varphi,$$

где $w=F(x,y)=f+j\varphi, \alpha=\frac{1}{2}(a_1+ja_2), \beta=\frac{1}{2}(b_1+jb_2), Q=p-jq,$

$$\frac{\partial w}{\partial Q}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)+j\left(\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right\}.$$

Теорема 2. Система дифференциальных уравнений (1) равносильна следующему интегральному уравнению

$$f(B)+j\varphi(B)=\int_{M_0}^{B}(\overline{\alpha}\cdot\overline{f}+\overline{\beta}\cdot\overline{\varphi})dQ(M)+F[P(B)], \tag{2}$$

где $F[P(B)]$ – произвольная функция, F-моногенная по функции P в точке $B\in D$; $\overline{f}=\overline{f}(B,M)=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}P^m(B)Q^n(M)$ т.п.; интеграл берется по прямолинейному отрезку $\overline{M_0B}$, принадлежащему некоторому замкнутому кругу $\overline{K}\subset D$ с центром в точке $M_0, M\in\overline{M_0B}$ B – произвольная точка круга $\overline{K}$.

Методом последовательных приближений найдено общее решение $w=f+j\varphi$ интегрального уравнения (2) (системы (1)) и доказана его единственность для данной функции $F[P(B)]$, F-моногенной по функции P .