

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДАМИ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Шилинец (Минск, Беларусь)
Shilinet@bspu.unibel.by

Для исследования дифференциальных уравнений в частных производных используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В.С. Федорова (F-моногенных) [1-3]. В частности, при помощи F-моногенных функций удастся построить функционально-инвариантные решения системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте и функционально-инвариантные вектор-аналитические функции [2-3]. Кроме этого, при помощи указанных функций удастся для отдельных видов дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений строить решения в замкнутой форме.

В данной работе при помощи F-моногенных функций исследуется система трех дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями и постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M_1 \frac{\partial u}{\partial y} - M_3 \frac{\partial v}{\partial y} - M_2 \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = M_2 \frac{\partial u}{\partial y} + M_1 \frac{\partial v}{\partial y} - M_3 \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = M_3 \frac{\partial u}{\partial y} + M_2 \frac{\partial v}{\partial y} + M_1 \frac{\partial w}{\partial y}, \end{cases} \quad (1)$$

где u, v, w — искомые комплекснозначные функции двух действительных переменных x, y ; M_1, M_2, M_3 — некоторые комплексные константы. Все функции предполагаются непрерывно дифференцируемыми в некоторой односвязной области D плоскости x, y .

Для изучения указанной системы дифференциальных уравнений (1) используется линейная ассоциативно-коммутативная алгебра (гиперкомплексная система) A с единицей над полем комплексных чисел. Алгебра A имеет базис $1, \lambda, \lambda^2$, закон умножения определяется равенством $\lambda^3 = -1$. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение системы дифференциальных уравнений в частных производных (1) имеет вид:*

$$u = \frac{P + Q + R}{3}, v = \frac{\bar{r}Q - P - R}{3}, w = \frac{P + Q - \bar{r}R}{3},$$

где $P \equiv P[\alpha]$ ($Q \equiv Q[\beta]$, $R \equiv R[\gamma]$) — произвольная комплексная функция, F-моногенная в области D по функции $\alpha = M_1x + y - M_2x + M_3x$ ($\beta = M_1x + y + rM_2x + r^2M_3x$, $\gamma = M_1x + y + \bar{r}M_2x + \bar{r}^2M_3x$); $r = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Литература

1. Федоров В. С. Основные свойства обобщенных моногенных функций // Известия вузов. Математика, 1958, № 6. С. 257–265.
2. Стельмашук Н. Т. Об исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967. Т. 7, № 2. С. 431–436.
3. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. 2006. № 1. С. 44–47.