О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДАМИ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Шилинец

Белорусский государственный педагогический университет, математический факультет, Минск, Беларусь
shilinets @bspu.unibel.by

Для исследования дифференциальных уравнений в частных производных используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В.С. Федорова (F-моногенных) [1,2]. В частности, при помощи F-моногенных функций удается построить функционально-инвариантные решения системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте и функционально-инвариантные вектор-аналитические функции. Кроме этого, при помощи указанных функций удается для отдельных видов дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений строить решения в замкнутой форме.

Предметом нашего исследования является система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка следующего вида:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,\end{array}\right\}\qquad(1)$$

где u, v, w – искомые комплекснозначные функции трех действительных переменных x, y, z класса $C^2(D)$, D – некоторая односвязная область евклидова пространства (x, y, z) . Рассматривается задача нахождения общего решения системы дифференциальных уравнений (1).

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений в частных производных* (1) *эквивалентна уравнению в формальных производных*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{\partial f}{\partial t}=0,\qquad(2)$$

где $f = u + \lambda v + \lambda^2 w, t = z\lambda^2(\lambda^3 = -1), \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda^2\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$.

Теорема 2. *Общее решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$f = V_1 + V_2\exp(-t),\qquad(3)$$

где $V_1 = V_1[p, q, D], V_2 = V_2[p, q, D]$ *– произвольные функции, F-моногенные по функциям* p *и* q *в области* $D(p = x + 2y\lambda + z\lambda^2, q = y\lambda + z\lambda^2, t = z\lambda^2)$.

Изучив структуру произвольной функции $V_1 = V_1[p, q, D]$, F-моногенной по функциям $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ и $q = y\lambda + z\lambda^2$ в области D, и выделив компоненты при базисных единицах $1, \lambda, \lambda^2$ общего решения (3) дифференциального уравнения в формальных производных (2), было найдено общее решение u, v, w системы дифференциальных уравнений в частных производных (1).

Литература

1. Федоров В. С. *Основные свойства обобщенных моногенных функций*// Известия вузов. Математика. 1958. №6. С. 257–265.

2. Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А. *О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. №2. С. 61–65.