Весці БДПУ. Серыя 3. 2022. № 2. С. 31–38

УДК 517.537.38

РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ *p*-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Довгодилин,
аспирант кафедры теории функций БГУ

UDC 517.537.38

UNIFORMLY CONVERGENT SEQUENCES OF *p*-HOLOMORPH FUNCTIONS

V. Dovgodilin,
Postgraduate Student of the Department of Functions Theory, BSU

Поступила в редакцию 25.05.2022.

Received on 25.05.2022.

В статье рассматриваются условия сходимости и компактности последовательностей *p*-голоморфных и *p*-аналитических функций. Доказана теорема о равномерном пределе последовательности *p*-голоморфных функций. Получены аналоги теоремы Вейерштрасса, а также теорем Монтеля и Витали о компактных семействах *p*-голоморфных функций. Найдено достаточное условие существования равномерного предела последовательности *p*-аналитических функций.

Ключевые слова: кольцо *p*-комплексных чисел, дуальные числа, последовательность, равномерная сходимость, компактность, теорема Вейерштрасса, теорема Монтеля, теорема Витали, *p*-голоморфность, *p*-аналитичность.

The article considers the conditions for convergence and compactness of sequences of *p*-holomorph and *p*-analytical functions. It proves the theorem about uniform limit of sequences of *p*-holomorph functions. We obtain the similarities of Weierstrass theorem as well as Montel and Vitali theorems about compact families of *p*-holomorph functions. We find out a sufficient condition of existence of uniform limit of sequence of *p*-analytical functions.

Keywords: ring of *p*-complex, dual numbers, sequence, uniform convergence, compactness, Weierstrass theorem, Montel theorem, Vitali theorem, *p*-holomorphism, *p*-analyticity.

Введение. Теория *p*-комплексных (дуальных) чисел и функций *p*-комплексных переменных в математической литературе освещена недостаточно. Некоторые результаты приведены в [1–4]. Дуальные числа и соответствующие функции находят применение в различных областях математики и физики, поэтому их дальнейшее изучение является актуальным. В предлагаемой статье рассматриваются некоторые свойства равномерно сходящихся последовательностей *p*-голоморфных и *p*-аналитических функций.

p-голоморфные функции

Пусть $\mathbb{C}_p$ – кольцо *p*-комплексных чисел вида $z = x + jy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 0$, $j \neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля вида jc. Топология на $\mathbb{C}_p$ порождается следующей нормой $\|z\| = \|x + jy\| = \max\{|x|, |y|\}$. Более подробно с *p*-комплексными числами можно ознакомиться в работах [1] и [2].

Пусть $f : G \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$. Представим эту функцию в виде $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, где $u = \mathrm{Re} f$ − действительная часть функции, а $v = \mathrm{Par} f$ − параболическая часть.

Определение 1. Функция *f* называется *p-голоморфной* в точке $z \in G$, если *f* определена в некоторой окрестности точки $z = z + jy$, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x,y) и в этой окрестности выполнены условия $u'_x = v'_y$, $u'_y = 0$. Функция *f* называется *p-голоморфной на множестве G*, если она *p*-голоморфна в каждой его точке.

Обозначим через $H_p(G)$ − множество всех функций, p-голоморфных на G. Для данных функций верно [2, теорема 2] представление

$$f(z) = f(x) + jyf'(x). \quad (1)$$

Производная p-голоморфной функции равна

$$f'(z) = u'_x + jv'_x.$$

Для нее верно представление

$$f'(z) = f'(x) + jyf''(x).$$

p-голоморфность предельной функции

Определение 2. Функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно на $G \subset \mathbb{C}_p$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \ge k_0 \quad \forall z \in G: \ \| f_k(z) - f(z) \| \le \varepsilon.$$

Определение 3. Функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится *равномерно* внутри области $G \subset \mathbb{C}_p$, если она сходится равномерно на любом компакте $K \subset G$.

Теорема 1. Пусть последовательность р-голоморфных в области $G \subset \mathbb{C}_p$ функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится внутри области G к f. Тогда она p-голоморфна в G.

Доказательство. Пусть K − компакт, $\Delta \subset K$ − произвольный треугольник, l − длина его границы $\partial\Delta$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Существует такое k_0, что

$$\forall k \ge k_0 \quad \forall z \in K: \ \| f_k(z) - f(z) \| \le \frac{\varepsilon}{2l}.$$

В силу p-голоморфности функций f_k имеем, что $\int_{\partial\Delta} f_k(t)dt = 0$. Используя свойства интегралов (см. [4]), получаем

$$\left\| \int_{\partial\Delta} f(t)dt \right\| = \left\| \int_{\partial\Delta} \{ f(t) - f_k(t) + f_k(t) \} dt \right\| \le$$

$$\le \left\| \int_{\partial\Delta} \{ f(t) - f_k(t) \} dt \right\| + \left\| \int_{\partial\Delta} f_k(t)dt \right\| \le 2 \sup_{t \in \partial\Delta} \| f(t) - f_k(t) \| l \le \frac{2\varepsilon}{2l} l \le \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что $\int_{\partial\Delta} f(t)dt = 0$. Используя аналог теоремы Морера [4, теорема 12], заключаем, что f p-голоморфна в K, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Дифференцирование предельной функции

Определение 4. *Простейшим* прямоугольником назовем множество вида

$$G = \{ z \in \mathbb{C}_p : a \le x \le b; c \le y \le d \}.$$

Его внутренность назовем *простейшей прямоугольной областью*.

Определение 5. *Элементарным* назовем множество с односвязной внутренностью, представимое в виде объединения конечного числа простейших прямоугольников. Его внутренность – элементарная область.

Теорема 2. Пусть K – элементарное множество. Тогда существует число $M(K)$ такое, что любые две точки $z, z_0 \in K$ можно соединить ломаной, длина которой не превышает $M(K)$.

Доказательство. Представим K в виде объединения конечного числа замкнутых треугольников Δ_i таких, что $K = \bigcup_{i=1}^{N} \Delta_i$. Пусть $P(\Delta_i)$ – периметр треугольника Δ_i. Положим

$M(K)=\sum_{i=1}^{N}P(\Delta_i)$. Пусть $z, z_0 \in K$ – внутренние точки. С помощью метода математической индукции покажем, что эти точки можно соединить ломаной γ такой, что $\gamma \cap \Delta_i = \gamma_i$ будет состоять не более чем из одного отрезка γ_i и $\gamma_i \cap \partial K = \varnothing$. При $N = 2$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при $N = n$. Докажем, что оно верно при $N = n + 1$. Любой треугольник Δ_i имеет общий участок границы с каким-либо треугольником Δ_j. Пусть Δ_{n+1} соседствует с Δ_n, $z \in \Delta_{n+1}$. Выберем произвольную внутреннюю точку $z^* \in \Delta_n$. Соединим ломаной точки z_0 и z^* и продлим отрезок γ_n до пересечения с общей границей треугольников Δ_n и Δ_{n+1}. Полученную точку пересечения соединим с точкой z. Построенная таким образом ломаная γ удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, длина каждого звена $l(\gamma_i) \le P(\Delta_i)$, тогда длина всей ломаной $l(\gamma) \le \sum_{i=1}^{N}P(\Delta_i) = M(K)$. Случай, когда $z, z_0 \in K$ – граничные точки, сводится к уже расмотренному с помощью подходящего выбора внутренних точек $z', z_0' \in K$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $G \subset \mathbb{C}_p$ – односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой ∂G, $f_n \in H_p(D)$ для любых $n \in \mathbb{N}$. Последовательность производных f_n' сходится равномерно внутри G к непрерывной функции g. Числовая последовательность $f_n(z_0)$ сходится в некоторой точке $z_0 \in G$. Тогда последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно внутри G к некоторой функции $f \in H_p(D)$ и для любых $z \in G$ выполняется $f'(z) = g(z)$.

Доказательство. Пусть $z, z_0 \in G$, $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ – компактное исчерпание [6, с. 103] G элементарными множествами такое, что $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ и $G_1 \subset G_2 \subset \ldots G_n \subset \ldots$.

Существует такое k_0, что $z, z_0 \in G_k$ для любого $k \ge k_0$. Используя равномерную сходимость последовательности производных f_n' и теорему о существовании глобальной первообразной [4, теорема 14], получим

$$\int_{z_0}^{z} g(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty}\int_{z_0}^{z} f_n'(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty}\left(f_n(z) - f_n(z_0)\right).$$

Отсюда находим $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \int_{z_0}^{z} g(\tau)d\tau + A$, где $A = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0)$, интегрирование ведется по ломаной $\gamma \subset G_{k_0}$ с концами z_0 и z, выбранной в соответствии с теоремой 2 и так, что ни одно из ее звеньев не лежит вдоль вертикальной прямой. Существует число $M(G_{k_0})$ такое, что длина ломаной $l(\gamma) \le M(G_{k_0})$. Имеем $f'(z) = g(z)$ для любого $z \in G_{k_0}$. Кроме того,

$$\|f_n(z) - f(z)\| = \left\|\left(\int_{z_0}^{z} f_n'(\tau)d\tau + f_n(z_0)\right) - \left(\int_{z_0}^{z} g(\tau)d\tau + A\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_{z_0}^{z}\left(f_n'(\tau) - g(\tau)\right)d\tau\right\| + \|f_n(z_0) - A\| \le$$

$$\le 2\sup_{\tau\in\gamma}\|f_n'(\tau) - g(\tau)\| l(\gamma) + \|f_n(z_0) - A\| \le 2\varepsilon M(G_{k_0}) + \varepsilon$$

при достаточно больших n и при любых $z \in G_{k_0}$. Отсюда вытекает, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к f на G_{k_0}. В силу произвольности $z \in G$ функция $f \in H_p(D)$ и для любых $z \in G$ выполняется $f'(z) = g(z)$.

Пусть $K \subset G$ – компакт. Найдется G_{k^*} такой, что $K \subset G_k$ для любого $k \ge k^*$. Следовательно, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно внутри G к функции f. Что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема 3 представляет собой аналог теоремы Вейерштрасса, выраженный на «языке» последовательностей.

Аналог теоремы Монтеля

Определение 6. Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *равностепенно непрерывной* внутри области $G \subset \mathbb{C}_p$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset G$

$$\exists \delta(\varepsilon, K) > 0 \ \ \forall z', z'' \in K \ \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \|z' - z''\| \le \delta(\varepsilon, K) \Rightarrow \|f_n(z') - f_n(z'')\| \le \varepsilon.$$

Определение 7. Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *равномерно ограниченной* внутри области $G \subset \mathbb{C}_p$, если для любого компакта $K \subset G$

$$\exists M(K) > 0 \ \ \forall z \in K \ \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \| f_n(z) \| \le M(K).$$

Теорема 4. Пусть $G \subset \mathbb{C}_p$ – односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой ∂G, $f_n \in H_p(D)$. Тогда:

а) если последовательность производных $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена внутри области G, то исходная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна внутри G;

б) если исходная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на некотором множестве E, всюду плотном в G, то она содержит подпоследовательность, сходящуюся на нем.

Доказательство. а) Пусть $K \subset G$ – компакт. Найдется такое $M(K)$, что $\| f_n'(z) \| \le M(K)$ для всех n и $z \in K$. Обозначим через 2ρ расстояние между K и ∂G. Пусть $z', z'' \in K$ и $\|z' - z''\| \le \dfrac{\rho}{2}$. Тогда z', z'' можно соединить ломаной γ такой, что ее длина $l(\gamma) \le 2\|z' - z''\|$ и верна оценка

$$\|f_n(z') - f_n(z'')\| = \left\| \int_{z'}^{z''} f_n'(\tau) d\tau \right\| \le 2M(K) l(\gamma) \le 4M(K) \|z' - z''\|.$$

Полагая $\delta = \min\left\{\dfrac{\rho}{2}, \dfrac{\varepsilon}{4M(K)}\right\}$, в силу определения 6 выводим, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна внутри G.

б) Пусть $E = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$. Теперь покажем, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся поточечно на E. В силу ограниченности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве $E \subset G$ последовательность $\{f_n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, а значит она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{f_{1,n}(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$. Числовая последовательность $\{f_{1,n}(z_2)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{f_{2,n}(z_2)\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно, функциональная последовательность $\{f_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в точках z_1, z_2. Далее, последовательность $\{f_{2,n}(z_3)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{f_{3,n}(z_3)\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, последовательность $\{f_{3,n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в точках z_1, z_2, z_3. Продолжая этот процесс неограниченно можно выбрать диагональную последовательность $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$, которая будет сходиться на всем множестве $E = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$. Действительно, пусть $z_\nu \in E$, тогда начиная с номера ν все члены последовательности $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежат $\{f_{\nu,n}\}_{n=1}^{\infty}$ (т. е. $\{f_{n,n}\}_{n=\nu}^{\infty} \subset \{f_{\nu,n}\}_{n=1}^{\infty}$), а значит сходится $\{f_{n,n}(z_\nu)\}_{n=1}^{\infty}$. Теорема доказана.

Определение 8. Функциональная последовательность p-голоморфных в области G функций называется компактной внутри G, если любая ее подпоследовательность содержит сходящуюся последовательность, в топологии равномерной сходимости на любом компакте внутри G.

Теорема 5 (аналог теоремы Монтеля). Пусть $G \subset \mathbb{C}_p$ – односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой ∂G, $f_n \in H_p(D)$. Если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на некотором множестве E, всюду плотном в G, а последовательность ее производных $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена внутри области G то $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является компактной внутри G.

Доказательство. В силу теоремы 4 последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна внутри G и содержит диагональную подпоследовательность $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся поточечно на множестве E, всюду плотном в G. Покажем, что эта подпоследовательность сходится равномерно внутри G. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и компакт $K \subset G$. Пользуясь равностепенной непрерывностью, с помощью горизонтальных и вертикальных прямых разобьем K на конечное число ячеек L : K_l, $l = \overline{1,L}$ так, чтобы для любых $z', z'' \in K$, принадлежащих одной ячейке

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \left\| f_{n,n}(z') - f_{n,n}(z'') \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Множество E всюду плотно в G, поэтому в каждой ячейке K_l найдется точка $z_l \in E$. Так как последовательность $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно на E, то найдется номер N такой, что для любого z_l, $l = \overline{1,L}$

$$\forall n,m > N: \quad \| f_{m,m}(z_l) - f_{n,n}(z_l) \| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть z – произвольная точка K. Найдется точка z_l, лежащая в той же ячейке, что и z. Тогда для любых $n,m > N$ будем иметь

$$\| f_{m,m}(z) - f_{n,n}(z) \| \leq \| f_{m,m}(z_l) - f_{n,n}(z_l) \| +$$

$$+ \| f_{m,m}(z_l) - f_{m,m}(z) \| + \| f_{n,n}(z_l) - f_{n,n}(z) \| \leq \varepsilon.$$

По критерию Коши, в силу теоремы 1, отсюда заключаем, что последовательность $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на K к p-голоморфной функции. Применяя эти рассуждения к произвольной подпоследовательности в $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, завершаем доказательство теоремы.

Равномерно сходящиеся последовательности p-аналитических функций

Определение 9. Пусть $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^k (z - z_0)^n$ – последовательность функций, p-аналитических в полосе $P = \left\{ \left| \mathrm{Re}(z - z_0) \right| < r \right\}$. Функция $f^M(z)$ называется *p-аналитической мажорантой* для последовательности $f_k(z)$ в P, если она представима в виде суммы степенного ряда $f^M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n (z - z_0)^n$, сходящегося в P и такого, что для любых n и k верно $\left\| d_n^k \right\| \leq M_n$.

Теорема 6. Пусть $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^k (z - z_0)^n$ – последовательность функций, p-аналитических в полосе $P = \left\{ \left| \mathrm{Re}(z - z_0) \right| < r \right\}$, имеющих p-аналитическую мажоранту в P. Если для любого n существует $d_n = \lim_{k \to \infty} d_n^k$, то последовательность $f_k(z)$ сходится равномерно внутри P к p-аналитической функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $z_0 = 0$, $P = \{|\operatorname{Re} z| < r\}$. Пусть $f^M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n$ – p-аналитическая мажоранта для $f_k(z)$ в P. В силу оценки $\left\|n\, d_n^k\right\| \le n M_n$ функция $\left(f^M(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} M_n n\, z^{n-1}$ является p-аналитической мажорантой для последовательнсти производных $f_k'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^k n\, z^{n-1}$. Используя свойства p-комплексных степенных рядов [2], для любого $z^* \in P$, выводим

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} d_n \left(z^*\right)^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left\|d_n \left(z^*\right)^n\right\| \le 2\sum_{n=0}^{\infty} M_n \left\|\left(z^*\right)^n\right\| < \infty.$$

Из этого вытекает, что функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, z^n$ и $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\, n\, z^{n-1}$ p-аналитические в полосе P. Пусть $P' = \{|\,x\,| \le r' = r - \delta, |\,y\,| \le q\}$, где $0 < \delta < r$, $q \ge 0$. Очевидно, что $P' \subset P$. Оценим $\|\, f_k'(x) - f'(x)\,\|$:

$$\left\|f_k'(x) - f'(x)\right\| = \left\|\left(d_1^k - d_1\right) + \ldots + n\left(d_n^k - d_n\right)x^{n-1} + \sum_{m=n+1}^{\infty} m\left(d_m^k - d_m\right)x^{m-1}\right\| \le$$
$$\le \left\|d_1^k - d_1\right\| + \ldots + n\left\|d_n^k - d_n\right\|\left|x\right|^{n-1} + \left\|\sum_{m=n+1}^{\infty} m\left(d_m^k - d_m\right)x^{m-1}\right\|,$$

аналогично для $\|\, f_k(x) - f(x)\,\|$ получаем

$$\left\|f_k(x) - f(x)\right\| \le \left\|d_0^k - d_0\right\| + \ldots + \left\|d_n^k - d_n\right\|\left|x\right|^{n} + \left\|\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(d_m^k - d_m\right)x^{m}\right\|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем n так, чтобы при $|\,x\,| \le r'$ выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \left\|\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}\left(d_m^k - d_m\right)x^m\right\| \le 4\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} M_m\,|\,x\,|^m \le \varepsilon \\ \left\|\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} m\left(d_m^k - d_m\right)x^{m-1}\right\| \le 4\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} m M_m\,|\,x\,|^{m-1} \le \varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

Фиксируем n и находим k_0 такое, что для всех $k \ge k_0$ и $m = \overline{0,n}$: $\|\, d_m^k - d_m\,\| \le \varepsilon$. Тогда при всех $|\,x\,| \le r'$, где $r' \ne 1$, имеем

$$\left\|d_0^k - d_0\right\| + \ldots + \left\|d_n^k - d_n\right\|\left|x\right|^n \le \varepsilon\left(1 + r' + \ldots + (r')^n\right) = \varepsilon\,\frac{1 - (r')^{n+1}}{1 - r'},$$

$$\left\|d_1^k - d_1\right\| + \ldots + \left\|d_n^k - d_n\right\|\left|x\right|^{n-1} \le \varepsilon\left(1 + 2r' + \ldots + n(r')^n\right) = \varepsilon\left(\frac{n(r')^n}{1 - r'} - \frac{1 - (r')^n}{(1 - r')^2}\right).$$

С учетом (3) для всех $k \ge k_0$ и при $|\,x\,| \le r'$, где $r' \ne 1$, получаем

$$\begin{cases} \left\|f_k(x) - f(x)\right\| \le \varepsilon\left(\dfrac{1 - (r')^{n+1}}{1 - r'} + 1\right) \\ \left\|f_k'(x) - f'(x)\right\| \le \varepsilon\left(\dfrac{n(r')^n}{1 - r'} - \dfrac{1 - (r')^{n+1}}{(1 - r')^2}\right). \end{cases} \tag{4}$$

При $r' = 1$ выводим

$$\begin{cases} \left\| f_k(x) - f(x) \right\| \le \varepsilon(n+2) \\ \left\| f_k'(x) - f'(x) \right\| \le \varepsilon\left(\left(\dfrac{1+n}{2}\right)n+1\right). \end{cases} \tag{5}$$

Используя (1) для всех $k \ge k_0$ и $z \in P'$, получим

$$\left\| f_k(z) - f(z) \right\| \le \left\| \left(f_k(x) - f(x) \right) + j\left|y\right| \left(f_k'(x) - f'(x) \right) \right\| \le$$

$$\le \left\| f_k(x) - f(x) \right\| + \left|y\right| \left\| f_k'(x) - f'(x) \right\|.$$

В силу (4), (5) и произвольности P' из последнего неравенства вытекает, что последовательность $f_k(z)$ сходится равномерно внутри P к p-аналитической функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$. Теорема доказана.

Аналог теоремы Витали

Определение 10. Последовательность $f_k(z)$ функций, p-аналитических в полосе $P = \left\{ \left| \mathrm{Re}(z - z_0) \right| < r \right\}$, называется *компактной в себе* в этой полосе, если любая ее подпоследовательность содержит последовательность, равномерно сходящуюся внутри P к p-аналитической функции.

Теорема 7. Пусть последовательность $f_k(z)$ функций, p-аналитических в полосе $P = \left\{ \left| \mathrm{Re}(z - z_0) \right| < r \right\}$, компактна в себе в P и сходится на некоторой последовательности $c_n \in P$ такой, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \in P$ и при всех n $\mathrm{Re}(c - c_n) \ne 0$. Тогда последовательность $f_k(z)$ сходится равномерно внутри P к p-аналитической функции.

Доказательство. Выберем две равномерно сходящиеся внутри P подпоследовательности $f_{1,k}(z)$ и $f_{2,k}(z)$ и пусть $\lim\limits_{k\to\infty} f_{1,k}(z) = f(z)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2,k}(z) = h(z)$. Функции $f(z)$, $h(z)$ – p-аналитические в P, $f(c_n) = h(c_n)$. Из теоремы единственности для p-аналитических функций [3, теорема 10] вытекает, что всюду в P выполняется $f(z) = h(z)$. Таким образом, предельная функция $f(z)$ является единственной для всех равномерно сходящихся внутри P подпоследовательностей. Пусть последовательность $f_k(z)$ не сходится равномерно к $f(z)$ на некотором компакте $K \subset P$. Тогда найдутся такое $\varepsilon_0 > 0$, подпоследовательность $f_k^{\varepsilon_0}(z)$ и последовательность точек $z_k \in K$ такие, что

$$\forall k: \quad \| f_k^{\varepsilon_0}(z_k) - f(z_k) \| > \varepsilon_0. \tag{7}$$

Однако последовательность $f_k^{\varepsilon_0}(z)$ содержит подпоследовательность $f_{1,k}^{\varepsilon_0}(z)$, равномерно сходящуюся внутри P на K к $f(z)$. Тогда найдется номер k_0 такой, что

$$\forall k > k_0 \quad \forall z \in K: \quad \| f_{1,k}^{\varepsilon_0}(z) - f(z) \| < \varepsilon_0. \tag{8}$$

Таким образом, получаем противоречие между (7) и (8). Отсюда следует, что последовательность $f_k(z)$ сходится равномерно к $f(z)$ на любом компакте $K \subset P$. Теорема доказана.

Заключение. В статье изучены некоторые свойства последовательностей *p*-голоморфных и *p*-аналитических функций. Доказаны теорема о равномерном пределе последовательностей *p*-голоморфных функций, аналог теоремы Вейерштрасса, а также теорем Монтеля и Витали о компактных семействах *p*-голоморфных функций. Получено достаточное условие существования равномерного предела последовательности *p*-аналитических функций.

Литература

1. *Яглом, И. М.* Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – Изд. 2-е, стереотипное. – М. : Едиториал УРСС. − 2004. − 192 с.
2. *Довгодилин, В. В*. Сходимость на множестве *p*-комплексных чисел и свойства *p*-комплексных степенных рядов / В. В. Довгодилин // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2020. – № 4. − С. 32–39.
3. *Васильев, И. Л.* О некоторых свойствах *p*-голоморфных и *p*-аналитических функций / И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 176–184.
4. *Васильев, И. Л.* Интегралы от *p*-комплексных функций и их свойства / И. Л. Васильев, В. В. Довгодилин // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2021. – № 2. − С. 31–36.
5. *Зверович, Э. И.* Вещественный и комплексный анализ: в 6 ч. Ч. 4. Функциональные последовательности и ряды. Интегралы, зависящие от параметра. Ч. 5. Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям / Э. И. Зверович. − Минск : Вышэйшая школа. − 2008. − 365 с.
6. *Стоилов, С.* Теория функций комплексного переменного: в 2 т. / С. Стоилов. – Т. 2. − М. : Иностранная литература. − 1962. − 416 с.

References

1. *Yaglom, I. M.* Kompleksnye chisla i ih primenenie v geometrii / I. M. Yaglom. – Izd. 2-e, stereotipnoe. – M. : Editorial URSS. − 2004. − 192 c.
2. *Dovgodilin, V. V*. Skhodimost' na mnozhestve *p*-kompleksnyh chisel i svojstva *p*-kompleksnyh stepennyh ryadov / V. V. Dovgodilin // Vesci BDPU. Ser. 3. – 2020. – № 4. − C. 32–39.
3. *Vasil'ev, I. L.* O nekotoryh svojstvah *p*-golomorfnyh i *p*-analiticheskih funkcij / I. L. Vasil'ev, V. V. Dovgodilin // Ves. Nac. akad. navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2021. – T. 57, № 2. – S. 176–184.
4. *Vasil'ev, I. L.* Integraly ot p-kompleksnyh funkcij i ih svojstva / I. L. Vasil'ev, V. V. Dovgodilin // Vesci BDPU. Ser. 3. – 2021. – № 2. − C. 31–36.
5. *Zverovich, E. I.* Veshchestvennyj i kompleksnyj analiz: v 6 ch. Ch. 4. Funkcional'nye posledovatel'nosti i ryady. Integraly, zavisyashchie ot parametra. Ch. 5. Kratnye integraly. Integraly po mnogoobraziyam / E. I. Zverovich. − Minsk : Vyshejshaya shkola. − 2008. − 365 c.
6. *Stoilov, S.* Teoriya funkcij kompleksnogo peremennogo: v 2 t. / S. Stoilov. – T. 2. − M. : Inostrannaya literatura. − 1962. − 416 s.